

DIỄN ĐÀN

PHƯƠNG
PHÁP
GIẢI
TOÁN



SỬ DỤNG ĐÁNH GIÁ TRUNG GIAN ĐỂ TÌM GIỚI HẠN DÃY SỐ

TRẦN QUỐC LUẬT
(GV THPT chuyên Hà Tĩnh)

Dãy số là một nội dung quan trọng trong chương trình toán THPT, đặc biệt là ở chương trình toán THPT chuyên. Các bài toán về giới hạn của dãy số thường xuyên xuất hiện trong kỳ thi học sinh giỏi các cấp. Thông thường chúng ta có một số phương pháp chung nhất định để tìm giới hạn của dãy số cho bởi công thức tổng quát $x_n = f(n)$ hay dãy số cho bởi công thức truy hồi $x_n = f(x_1; \dots; x_{n-1})$. Tuy nhiên loại dãy số cho bởi công thức là tổ hợp của hai dạng trên (mà ta không tìm được cụ thể công thức tổng quát của nó hay ta không tìm được điểm bất động) thì chưa có phương pháp giải quyết chung. Bài viết nhỏ này khai thác một định hướng tiếp cận dạng toán trên, đó là sử dụng các đánh giá trung gian để kẹp dãy số bằng các giới hạn cơ bản rồi qua đó tìm ra giới hạn. Chúng ta sẽ bắt đầu với một thí dụ đơn giản.

Thí dụ 1. Cho dãy số (x_n) xác định bởi

$$x_1 = \frac{3}{2}; x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + \frac{2n+11}{n+5}, \forall n \geq 1.$$

Chứng minh rằng dãy số đã cho có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Phân tích. Nếu gọi điểm bất động của dãy số là x_0 thì ta có $x_0 = x_0^2 - 2x_0 + 2 \Leftrightarrow x_0 = 1; x_0 = 2$. Ngoài ra dễ thấy $x_{n+1} > (x_n - 1)^2 + 1 > 1, \forall n \geq 1$ suy ra $x_n > 1, \forall n \geq 1$. Ta dự đoán $\lim x_n = 1$ và để có điều này ta cần tìm được a, b thỏa mãn $x_n \leq 1 + \frac{1}{an+b}, \forall n \geq 1$ (*). Để chứng minh (*) ta sử dụng phương pháp quy nạp. Chú ý rằng hàm số $f(x) = x^2 - 2x$ đồng biến trên $(1; +\infty)$ nên để quy nạp thành công ta cần phải có $0 < a+b \leq 2$ để (*) đúng ở bước cơ sở $n=1$ và

$$\left(1 + \frac{1}{ak+b}\right)^2 - 2\left(1 + \frac{1}{ak+b}\right) + \frac{2k+11}{k+5} \leq 1 + \frac{1}{a(k+1)+b} \quad (**)$$

để (*) đúng ở bước quy nạp.

Ta chọn $b = 4a$ để thu gọn nhanh biểu thức

$$1 + \frac{1}{a(k+1)+b} - \frac{2k+11}{k+5}.$$

Khi đó: $(**) \Leftrightarrow a(1-a)(k+4)^2 \geq k+5$.

Để bất đẳng thức này đúng với mọi $k \geq 1$ thì trước hết nó phải đúng với $k=1$, tức là $25a(1-a) \geq 6$, kết hợp với $0 < 4a+a \leq 2$ ta được $a \leq \frac{2}{5}$. Ta chọn luôn $a = \frac{2}{5}$.

Tóm lại ta chứng minh được

$$1 < x_n \leq 1 + \frac{5}{2(n+4)}, \forall n \geq 1.$$

Lời giải. Do $x_{n+1} = (x_n - 1)^2 + 1 + \frac{1}{n+5} > 1, \forall n \geq 1$ và $x_1 > 1$ nên $x_n > 1, \forall n \geq 1$. Ta sẽ chứng minh $x_n \leq \frac{2n+13}{2(n+4)}, \forall n \geq 1$ (*) bằng phương pháp quy

nạp. Thật vậy với $n=1$ thì (*) đúng. Giả sử (*) đúng với $n=k$ ($k \geq 1$), khi đó $x_k \leq \frac{2k+13}{2(k+4)}$.

Ta cần chứng minh (*) đúng với $n=k+1$, tức

$$x_{k+1} \leq \frac{2k+15}{2(k+5)}.$$

Thật vậy, do hàm số $f(x) = x^2 - 2x$ đồng biến trên $(1; +\infty)$ và $x_k > 1$ nên (chú ý $k \geq 1$)

$$\begin{aligned} x_{k+1} - \frac{2k+15}{2(k+5)} &= f(x_k) + \frac{2k+7}{2(k+5)} \\ &\leq f\left(\frac{2k+13}{2(k+4)}\right) + \frac{2k+7}{2(k+5)} = -\frac{(k-1)(6k+29)}{4(k+4)^2(k+5)} \leq 0. \end{aligned}$$

Do đó (*) đúng theo nguyên lý quy nạp.

Theo nguyên lý kẹp, dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn và $\lim x_n = 1$. \square

Nhận xét. Ta có thể giải bài này bằng cách dùng Nguyên lý Weierstrass. Trong các thí dụ tiếp theo chúng tôi chỉ trình bày phần phân tích, bạn đọc tự hoàn thiện phần lời giải.

Thí dụ 2. (VMO-2012) Cho dãy số (x_n) xác định

$$x_1 = 3; x_n = \frac{n+2}{3n}(x_{n-1} + 2), \forall n \geq 2.$$

Chứng minh rằng dãy số đã cho có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Phân tích. Gọi điểm bất động của dãy số là x_0 thì

$$x_0 = \frac{x_0 + 2}{3} \Leftrightarrow x_0 = 1. \text{ Ta dự đoán } \lim x_n = 1.$$

Để phát hiện $x_n > 1, \forall n \geq 1$ (chứng minh điều này bằng quy nạp) nên để khẳng định dự đoán trên đúng ta cần tìm được a, b thỏa mãn

$$x_n \leq 1 + \frac{1}{an+b}, \forall n \geq 1 (*).$$

Ta cần chọn a, b sao cho $0 < a+b \leq \frac{1}{2}$ và

$$\frac{k+3}{3(k+1)} \left(3 + \frac{1}{ak+b} \right) \leq 1 + \frac{1}{a(k+1)+b} (**).$$

Chọn $b = 3a$ (để thu gọn nhanh về trái) thì $(**) \Leftrightarrow 2(1-3a)k \geq 24a+1$. Để bất đẳng thức này đúng với mọi $k \geq 1$ thì trước hết nó phải đúng với $k=1$, khi đó $30a \leq 1$ (thỏa mãn $0 < a+b = 4a \leq \frac{1}{2}$). Ta chọn luôn $a = \frac{1}{30}$. Khi đó

$$(**) \Leftrightarrow \frac{-18(k-1)}{(k+1)(k+4)} \leq 0, \text{ đúng vì } k \geq 1. \text{ Tóm lại}$$

$$1 < x_n \leq \frac{n+33}{n+3}, \forall n \geq 1. \text{ Bài toán kết thúc. } \square$$

Thí dụ 3. Cho dãy số (x_n) xác định bởi

$$x_1 = \frac{3}{2}; x_{n+1} = 2x_n - \frac{4n+1}{nx_n}, \forall n \geq 1.$$

Tìm giới hạn của dãy số đã cho.

Phân tích. Ta có $x_{n+1} = f_n(x_n)$ với

$$f_n(x) = 2x - \frac{4n+1}{nx}$$

Ta sẽ tìm a, b sao cho $x_n \geq an+b, \forall n \geq k_0$ để $\lim x_n = +\infty$. Để quy nạp thành công, ta cần phải

$$\text{có } 2(ak+b) - \frac{4k+1}{k(ak+b)} \geq a(k+1)+b.$$

$$\text{Điều này tương đương với } ak+b-a \geq \frac{4k+1}{ak^2+bk}$$

$$\Leftrightarrow a^2k^3 + (2ab-a^2)k^2 + (b^2-ab-4)k - 1 \geq 0.$$

Ngoài ra ta cần thêm điều kiện để bước cơ sở đúng, việc chọn a, b sao cho điều kiện trên được thỏa mãn, đồng thời bước cơ sở đúng khi $n=1$,

$n=2$ khá khó khăn nên ta tìm điều kiện để bước cơ sở đúng khi $n=3$, tức là $\frac{77}{6} \geq 3a+b$. Khi đó

$a=1, b=2, k_0=3$ thỏa mãn các yêu cầu.

Tóm lại ta đã chứng minh $x_n \geq n+2, \forall n \geq 3$.

Vậy $\lim x_n = +\infty$. \square

Thí dụ 4. (VMO-2011) Cho dãy số (x_n) xác định

$$x_1 = 1; x_n = \frac{2n}{(n-1)^2}(x_{n-1} + \dots + x_2 + x_1), \forall n \geq 2.$$

Với mỗi $n \geq 1$, đặt $y_n = x_{n+1} - x_n$. Chứng minh rằng dãy số (y_n) có giới hạn hữu hạn.

Phân tích. Với mọi $n \geq 1$, ta có

$$x_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} \right) x_n \text{ và } y_n = \frac{n^2+n+1}{n^3} x_n.$$

Ta có $y_1 = 3; y_2 = \frac{7}{2} > y_1; y_3 = \frac{65}{18} > y_2$ nên ta dự

đoán $y_{n+1} > y_n, \forall n \geq 1$ (*). Thật vậy điều này

tương đương với $\frac{n^2+3n+3}{(n+1)^3} x_{n+1} > \frac{n^2+n+1}{n^3} x_n$

$$\Leftrightarrow (n^2+1)(n^2+3n+3) > (n^2+n+1)(n+1)^2, \text{ đúng.}$$

Ta tìm a, b sao cho $x_n \leq an+b, \forall n \geq k_0$ để

$$y_n \leq \frac{(an+b)(n^2+n+1)}{n^3} < 100ak_0^2(a+b), \forall n \geq k_0.$$

Để quy nạp thành công, ta cần phải có

$$\frac{(k+1)(k^2+1)}{k^3}(ak+b) \leq a(k+1)+b.$$

Thật vậy, điều này tương đương với

$$-(a+b)k^2 - (a+b)k - b \geq 0.$$

Ta cần điều kiện $a+b < 0; b < 0$. Ngoài ra ta cần thêm điều kiện để bước cơ sở đúng, do bước cơ sở không thể đúng khi $n=1$ nên ta tìm điều kiện để bước cơ sở đúng khi $n=2$, tức là $4 \leq 2a+b$.

Chẳng hạn $a=5; b=-6$ thì $x_n \leq 5n-6, \forall n \geq 2$.

Bài toán đã được giải quyết. \square

Thí dụ 5. Cho dãy số (x_n) xác định bởi

$$x_1 = 2; x_{n+1} = x_n + \frac{n}{x_n}, \forall n \geq 1.$$

Chứng minh rằng các dãy số $y_n = \frac{x_n}{n}; z_n = x_n - n$

có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Phân tích. Ta có $y_1 = 2; y_{n+1} = f_n(y_n), \forall n \geq 1$ với

$$f_n(x) = x - \frac{x^2-1}{x(n+1)} \text{ là hàm đồng biến trên}$$

$(1; +\infty)$. Nhận thấy điểm bất động của $f(x)$ là 1 ($f_n(t) = t \Leftrightarrow t = 1$) nên ta dự đoán $\lim y_n = 1$.

So sánh các giá trị đầu của dãy (y_n) với 1 và dự đoán $y_n > 1, \forall n \geq 1$.

Ta sẽ chứng minh điều này bằng quy nạp, thật vậy với $y_k > 1$ ($k \geq 1$) thì $y_{k+1} = f_k(y_k) > f_k(1) = 1$.

Ta cần đánh giá được $y_n \leq 1 + \frac{1}{an+b}, \forall n \geq 1$ để có $\lim y_n = 1$.

Để quy nạp thành công, ta cần chứng minh được

$$f_k(y_k) \leq 1 + \frac{1}{a(k+1)+b} \text{ với } 1 < y_k \leq 1 + \frac{1}{ak+b}.$$

$$\begin{aligned} \text{Thật vậy do } f_k(y_k) &\leq f_k\left(1 + \frac{1}{ak+b}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{ak+b} - \frac{1+2(ak+b)}{(k+1)(ak+b)(ak+b+1)} \end{aligned}$$

nên cần chọn a để

$$\begin{aligned} \frac{1}{ak+b} - \frac{1+2(ak+b)}{(k+1)(ak+b)(ak+b+1)} &< \frac{1}{a(k+1)+b} \\ \Leftrightarrow \frac{a}{a(k+1)+b} &< \frac{2ak+2b+1}{(k+1)(ak+b+1)} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow a^2k^2 + (a^2 + 3ab)k + 2b^2 + ab + b > 0.$$

Ta thấy $a=1; b=0$ thỏa mãn. Như vậy

$$1 < y_n \leq 1 + \frac{1}{n}, \forall n \geq 1 \text{ nên } \lim y_n = 1.$$

Ta có $z_{n+1} = g_n(z_n), \forall n \geq 1$ với $g_n(x) = x - \frac{x}{x+n}$

là hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Để thấy $z_n > 0, \forall n \geq 1$. Ta cần đánh giá được

$$z_n \leq \frac{1}{an+b}, \forall n \geq 2 \text{ để có } \lim z_n = 0.$$

Để quy nạp thành công, ta cần chứng minh được

$$g_k\left(\frac{1}{ak+b}\right) \leq \frac{1}{a(k+1)+b} \text{ tức là}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{ak+b} - \frac{1}{1+k(ak+b)} &\leq \frac{1}{a(k+1)+b} \\ \Leftrightarrow a(a+b)k + ab - a + b^2 &\geq 0, \forall k \geq 2. \end{aligned}$$

Ta thấy $a=\frac{1}{2}, b=1$ thỏa mãn điều kiện này.

Như vậy $0 < z_n \leq \frac{2}{n+2}, \forall n \geq 2$ nên $\lim z_n = 0$. \square

Thí dụ 6. Cho dãy số (x_n) xác định bởi

$$x_1 = \frac{1}{2}; x_{n+1} = \frac{nx_n^2}{1+(n+1)x_n}, \forall n \geq 1.$$

$$\text{Chứng minh rằng dãy số } y_n = \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \dots + \frac{x_{n+1}}{x_n}$$

có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Phân tích. Dễ thấy $x_n > 0, \forall n \geq 1$. Ta có

$$\frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{kx_k}{1+(k+1)x_k} = kx_k - (k+1)x_{k+1}, \forall k \geq 1.$$

$$\text{Do vậy } y_n = \frac{1}{2} - (n+1)x_{n+1}, \forall n \geq 0.$$

Dự đoán $\lim y_n = \frac{1}{2}$. Ta sẽ tìm $a > 0, b > 0$ để

$$nx_n \leq \frac{1}{an+b}, \forall n \geq 1 \text{ tức } x_n \leq \frac{1}{n(an+b)}, \forall n \geq 1.$$

Để ý rằng hàm số $f(x) = \frac{nx^2}{1+(n+1)x}$ đồng biến

trên $(0; +\infty)$ với mọi $n \geq 1$ nên để quy nạp thành công chúng ta cần có

$$\begin{aligned} \frac{k(k+1)}{k^2(ak+b)^2 + k(k+1)(ak+b)} &< \frac{1}{a(k+1)+b} \\ \Leftrightarrow a^2k^3 + 2abk^2 + (b^2 - a)k - a &> 0. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức trên đúng chẳng hạn khi $a=b=1$.

Tóm lại ta chứng minh được $x_n \leq \frac{1}{n(n+1)}, \forall n \geq 1$.

Khi đó

$$\frac{1}{2} > y_n = \frac{1}{2} - (n+1)x_{n+1} > \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}, \forall n \geq 1$$

nên tồn tại $\lim y_n$ hữu hạn và $\lim y_n = \frac{1}{2}$. \square

Thí dụ 7. (VMO-2015) Cho $a \in [0; 1]$ và dãy số (x_n) xác định bởi

$$x_1 = 3; x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{n^2}{4n^2+a} \sqrt{x_n^2 + 3}, \forall n \geq 1.$$

Chứng minh dãy số đã cho có giới hạn hữu hạn.

Phân tích. Xét các dãy số $(a_n); (b_n)$ xác định bởi

$$a_1 = 3; a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{4} \sqrt{a_n^2 + 3}, \forall n \geq 1$$

$$\text{và } b_1 = 3; b_{n+1} = \frac{b_n}{2} + \frac{n^2}{4n^2+1} \sqrt{b_n^2 + 3}, \forall n \geq 1.$$

Khi đó $a_n \geq x_n \geq b_n > 0, \forall n \geq 1$ và $\lim a_n = 1$.

Ta có $\sqrt{(1+3)(a^2+3)} \geq a+3, \forall a > 0$ nên

$$b_{n+1} \geq f_n(b_n), \forall n \geq 1 \text{ trong đó}$$

$f_n(x) = \frac{x}{2} + \frac{n^2(x+3)}{2(4n^2+1)}$ với $f_n(x)$ là hàm số đồng

biến trên $(0; +\infty)$. Ta sẽ tìm $a, b > 0$ sao cho

$$b_n \geq 1 - \frac{1}{an+b}, \forall n \geq 1 \text{ để từ đó } \lim x_n = 1.$$

Thật vậy, để quy nạp thành công chúng ta cần có

$$f_k\left(1 - \frac{1}{ak+b}\right) \geq 1 - \frac{1}{a(k+1)+b} \text{ tức là}$$

$$1 - \frac{1}{ak+b} + \frac{k^2}{8k^2+2} \left(4 - \frac{1}{ak+b}\right) \geq 1 - \frac{1}{a(k+1)+b}.$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$3ak^3 + (3b - 5a - a^2)k^2 + (a - a^2 - 2ab)k + (b - a - ab - b^2) \geq 0.$$

Với $a = \frac{1}{3}, b = 1$ thì bất đẳng thức này tương đương với $(k+1)(9k^2 + 2k - 6) \geq 0$, đúng $\forall k \geq 1$.

Như vậy ta đã có $a_n \geq x_n \geq b_n \geq 1 - \frac{3}{n+3}, \forall n \geq 1$

và $\lim a_n = 1$ nên tồn tại giới hạn $\lim x_n = 1$. \square

Thí dụ 8. (Olympic vùng Duyên hải và đồng bằng Bắc Bộ 2015) Cho dãy số (x_n) xác định bởi

$$x_1 = 2; x_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{x_n + 1}, \forall n \geq 1.$$

Chứng minh rằng dãy số $y_n = \frac{x_n}{n}$ có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Phân tích. Ta có $y_1 = 2; y_{n+1} = f(y_n), \forall n \geq 1$ với $f(x) = \frac{n+1}{nx+1}$. Nhận thấy điểm bất động của

$f(x)$ là 1 (tức là với mỗi n thì $f(t) = t \Leftrightarrow t = 1$) nên ta dự đoán $\lim y_n = 1$. Dễ thấy $x_n > 0, \forall n \geq 1$ và với mỗi n thì $f(x)$ luôn nghịch biến trên $(0; +\infty)$. Đặt $z_n = y_{2n-1}; \forall n \geq 1$ ta thấy

$$z_n > 1; \forall n \geq 1 \text{ vì } z_1 = y_1 > 1 \text{ và}$$

$$f(x) > 1 \Leftrightarrow x < 1; f(x) < 1 \Leftrightarrow x > 1.$$

Ta sẽ tìm $a, b > 0$ sao cho

$$z_n \leq 1 + \frac{1}{an+b}, \forall n \geq 1 \text{ để từ đó } \lim z_n = 1.$$

Thật vậy ta có $z_{n+1} = \frac{2n+1}{4n^2}, \forall n \geq 2$.

$$\frac{1}{(2n-1)z_n + 1} + 1$$

Để quy nạp thành công ta cần có

$$\frac{2k+1}{4k^2} < 1 + \frac{1}{a(k+1)+b}.$$

Chẳng hạn với $a = 1; b = 0$ thì bất đẳng thức này tương đương với $4k \geq 1$, đúng với mọi $k \geq 1$.

Như vậy ta đã chứng minh $1 < z_n \leq 1 + \frac{1}{n}, \forall n \geq 1$

nên tồn tại $\lim z_n$ hữu hạn và $\lim z_n = 1$.

Đặt $t_n = y_{2n}, \forall n \geq 1$ ta có $t_n < 1, \forall n \geq 1$ và

$$t_{n+1} = y_{2n+2} = \frac{2n+2}{(2n+1)z_{n+1} + 1} \geq \frac{2(n+1)^2}{2n^2 + 6n + 3}, \forall n \geq 2.$$

Như vậy $\frac{2(n+1)^2}{2n^2 + 6n + 3} \leq t_n < 1, \forall n \geq 2$ nên tồn tại

$\lim t_n$ hữu hạn và $\lim t_n = 1$.

Tóm lại tồn tại $\lim y_n$ hữu hạn và $\lim y_n = 1$. \square

Thí dụ 9. Cho dãy số (x_n) xác định bởi

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_n = \frac{2n-3}{2n} x_{n-1}; \forall n \geq 2. \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy số $y_n = x_1 + \dots + x_n$ có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Phân tích. Ta có

$$x_{n-1} = 2[(n-1)x_{n-1} - nx_n], \forall n \geq 2$$

nên $y_n = x_1 + \dots + x_n = 2[1 - (n+1)x_{n+1}], \forall n \geq 2$.

Đặt $z_n = nx_n$ ta có $z_1 = 1; z_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} z_n, \forall n \geq 1$.

Rõ ràng $z_n > 0, \forall n \geq 1$ nên ta chỉ cần chọn được

a, b thỏa mãn $z_n \leq \frac{1}{an+b}, \forall n \geq 1$ để $\lim z_n = 0$.

Để quy nạp thành công thì ta cần phải chọn được

$$a, b \text{ sao cho } \frac{2k-1}{2k} \frac{1}{ak+b} \leq \frac{1}{a(k+1)+b}.$$

Điều này tương đương với $ak - a - b \leq 0, \forall k \geq 1$, không tồn tại $a, b > 0$ thỏa mãn.

Ta sẽ tìm a, b để $z_n \leq \frac{1}{\sqrt{an+b}}, \forall n \geq 1$. Khi đó

$$a, b \text{ cần thỏa mãn } \frac{2k-1}{2k} \frac{1}{\sqrt{ak+b}} \leq \frac{1}{\sqrt{a(k+1)+b}}$$

$$\Leftrightarrow (3a+4b)k - a - b \geq 0.$$

Chọn $a = 1; b = 0$ thỏa mãn. Tóm lại ta đã có

$0 < z_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}, \forall n \geq 1$ nên $\lim z_n = 0$ và $\lim y_n = 2$. \square

Thí dụ 10. Cho dãy số (x_n) xác định bởi

$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_{n+1} = \frac{n+1}{3n} \sqrt{x_n^2 + nx_n + 2n^2} + \frac{2n^2 + 3n + 1}{x_n + 5n}, n \geq 1. \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy số $y_n = \frac{x_n}{n+1}$ có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Phân tích. Với mỗi $n \geq 1$, đặt $x_n = na_n$ thì

$$a_{n+1} = \frac{\sqrt{a_n^2 + a_n + 2}}{3} + \frac{2n+1}{n(a_n+5)}, \forall n \geq 1.$$

Để thấy hàm số $f_n(x) = \frac{\sqrt{x^2 + x + 2}}{3} + \frac{2n+1}{n(x+5)}$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Chú ý $f_n(1) > 1, \forall n \geq 1$ và $a_1 > 4$ nên bằng quy nạp ta chứng minh được $a_n > 1, \forall n \geq 1$.

Khi đó, ta có $\sqrt{a_n^2 + a_n + 2} < a_n + 1$ nên

$$a_{n+1} < g_n(a_n), \forall n \geq 1 \text{ với } g_n(x) = \frac{x+1}{3} + \frac{2n+1}{n(x+5)}$$

là hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Ta tìm $a, b > 0$ sao cho $a_n \leq 1 + \frac{1}{an+b}, \forall n \geq 1$.

Thật vậy, để quy nạp thành công chúng ta cần có

$$g_k\left(1 + \frac{1}{ak+b}\right) \leq 1 - \frac{1}{a(k+1)+b}, \text{ tức là}$$

$$\frac{2 + \frac{1}{ak+b}}{3} + \frac{2k+1}{k\left(6 + \frac{1}{ak+b}\right)} \leq 1 - \frac{1}{a(k+1)+b}.$$

Để thuận tiện trong tính toán, chọn $b = 0$.

Khi đó bất đẳng thức trên tương đương

$$(13-3a)a^2k^2 + (-3a^2-5a+2)ak - a \geq 0.$$

Ta cần chọn a sao cho

$$13-3a \geq 0; -3a^2-5a+2 \geq 0 \text{ và } 0 < 3a \leq 1$$

(để bước cơ sở đúng).

Giá trị a thỏa mãn các điều kiện trên là $a = \frac{1}{3}$.

Khi đó bất đẳng thức trên trở thành $2k \geq 1$, đúng.

Như vậy ta đã có $1 < a_n \leq 1 + \frac{3}{n}, \forall n \geq 1$ nên tồn tại $\lim a_n$ hữu hạn và $\lim a_n = 1$.

Từ đó tồn tại $\lim y_n$ hữu hạn và $\lim y_n = 1$.

Bài toán được giải quyết. \square

Thí dụ 11. Cho dãy số (x_n) xác định bởi

$$\begin{cases} x_0 = x_1 = 0; \\ x_n = \sum_{i=1}^n \frac{(i-1)(x_{i-1}+1) + (n-i)(x_{n-i}+1)}{n^2}, \forall n \geq 2. \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy số $y_n = \frac{x_n}{\ln n}$ có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Phân tích. $\forall n \geq 2, x_{n+1} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} x_n + \frac{2n}{(n+1)^2}.$

Sử dụng định lý Stolz, ta thấy nếu $\frac{nx_n}{(n+1)^2} \rightarrow 0$

thì (y_n) có giới hạn hữu hạn và $y_n \rightarrow 2$.

Ta chỉ cần chứng minh $x_n < 2\sqrt{n}, \forall n \geq 2$.

Điều này đúng do bất đẳng thức bước quy nạp là

$$2\sqrt{k} \frac{k(k+2)}{(k+1)^2} + \frac{2k}{(k+1)^2} \leq 2\sqrt{k+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{k^2+2k}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} > \frac{k^2-k-1}{k+\sqrt{k+1}}$$

(đúng do $k^2+2k > k^2-k-1 > 0; k > \sqrt{k}, \forall k \geq 2$). \square

Sau đây là một số bài tập vận dụng.

1. Cho dãy số (x_n) xác định bởi

$$x_1 = 1; x_{n+1} = \sqrt{n(n+1)} \frac{x_n}{x_n^2 + n}, \forall n \geq 1.$$

Chứng minh dãy số đã cho có giới hạn hữu hạn.

2. Cho dãy số (x_n) xác định bởi

$$x_1 = \frac{1}{2}; x_{n+1} = x_n + \frac{\sqrt[3]{x_n}}{n^2}, \forall n \geq 1.$$

Chứng minh dãy số đã cho có giới hạn hữu hạn.

3. Cho hai dãy số $(x_n); (y_n)$ xác định bởi

$$x_1 = 2; y_1 = 1; x_{n+1} = x_n^2 + 1; y_{n+1} = x_n y_n, \forall n \geq 1.$$

Chứng minh dãy số $z_n = \frac{x_n}{y_n}$ có giới hạn hữu hạn.

4. Cho dãy số (x_n) xác định bởi

$$x_0 = 1, 9; x_n = \frac{x_{n-1}^2 - 1}{n}, \forall n \geq 1.$$

Chứng minh dãy số đã cho có giới hạn hữu hạn.