

Contrôle final de Mécanique Analytique  
Durée=45mn

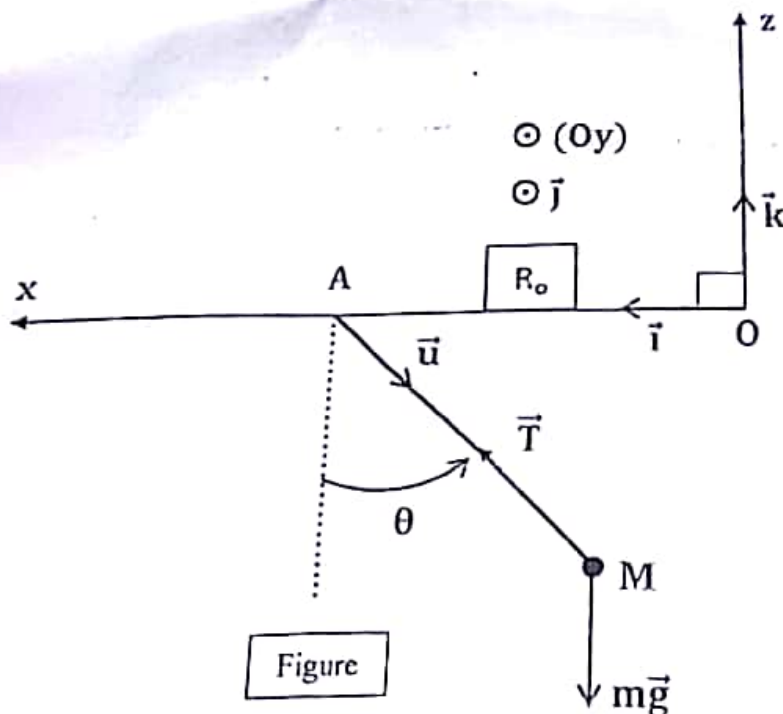
Nom	Prénom	Note sur 20

On considère dans un plan vertical un pendule simple de longueur  $L$  et de masse  $m$  (Voir figure) dont l'extrémité  $A$  est animée d'un mouvement rectiligne accéléré par rapport au repère cartésien  $R_o(O, x, y, z)$  selon la loi horaire suivante:

$$x_A(t) = \frac{1}{2} \gamma_0 t^2 + V_0 t$$

où  $\gamma_0$  et  $V_0$  sont respectivement l'accélération constante et la vitesse initiale de l'extrémité  $A$  et  $t$  étant la variable temps.

Le repère  $R_o$  de base orthonormée directe  $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$  est supposé galiléen.



On donne :  $\vec{T} = -T\vec{u}$  où  $\vec{u}$  est un vecteur unitaire et  $T = \|\vec{T}\|$ .

N.B : On exprimera toutes grandeurs vectorielles dans la base  $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ .

1/ Exprimer le vecteur position  $\vec{OM}$  en fonction de  $\gamma_0$ ,  $V_0$ ,  $L$ ,  $\theta$  et  $t$ .

1.5

$$\begin{aligned}\vec{OM} &= \vec{OA} + \vec{AP} \quad \leftarrow (0.15 \text{ pt}) \\ &= \gamma_0(t) \vec{e} + L \vec{u} \quad \text{avec } \vec{u} = \sin \theta \vec{e} - \cos \theta \vec{k} \\ &= \left( \frac{1}{2} \gamma_0 t^2 + V_0 t - L \sin \theta \right) \vec{e} - L \cos \theta \vec{k} \quad \leftarrow (1 \text{ pt})\end{aligned}$$

2/ Déduire alors l'équation de la liaison vérifiée par les coordonnées cartésiennes  $x$  et  $y$  du point matériel  $M$  et la variable temps. Préciser la nature de cette liaison ainsi que le nombre de degrés de liberté  $ndf$  associé à ce mouvement.

1.5 point + 1.25 point + 1.25 point

$$\text{On a : } \begin{cases} x = \frac{1}{2} \gamma_0 t^2 + V_0 t - L \sin \theta \\ y = -L \cos \theta \end{cases} \quad (1.15 \text{ pt})$$

$$\Rightarrow \left( x - \frac{1}{2} \gamma_0 t^2 - V_0 t \right)^2 + y^2 - L^2 = 0 \quad (\text{liaison holonôme})$$

$$ndf = 2 - 1 = 1 \quad \leftarrow (1.25 \text{ pt})$$

(1.25 pt)

3/ établir l'expression du vecteur déplacement élémentaire réel  $d\vec{OM}]_{R_0}$ , en déduire celle du vecteur déplacement élémentaire virtuel  $\delta\vec{OM}]_{R_0}$ .

1.5 point + 1.5 point

$$d\vec{OM}]_{R_0} = dx \vec{e} + dy \vec{k}$$

$$= [(\gamma_0 t + V_0) dt - L d\theta \cos \theta] \vec{e} + L d\theta \sin \theta \vec{k} \quad \leftarrow (1.15 \text{ pt})$$

$$\Rightarrow \delta\vec{OM}]_{R_0} = [-\cos \theta \vec{e} + \sin \theta \vec{k}] L \delta\theta \quad \text{car } \delta t = 0$$

(1.15 pt)



4/ Déterminer l'expression du vecteur vitesse instantanée  $\vec{V}(M/R_0)$  en fonction de  $\gamma_0$ ,  $V_0$ ,  $L$ ,  $\theta$ ,  $\dot{\theta}$  et  $t$  en déduire l'expression de l'énergie cinétique  $E_c(M/R_0)$ . 1 point + 1 point

$$\vec{V}(M/R_0) = \frac{d\vec{OM}}{dt} \Big|_{R_0} = (\gamma_0 t + V_0 - L\dot{\theta}\cos\theta)\vec{e}_r + L\dot{\theta}\sin\theta\vec{e}_\theta$$

(1 pt)

$$\Rightarrow E_c(M/R_0) = \frac{1}{2} m \vec{V}(M/R_0)^2$$

$$(1 pt) \rightarrow = \frac{1}{2} m \left\{ (\gamma_0 t + V_0)^2 - 2(\gamma_0 t + V_0)L\dot{\theta}\cos\theta + (L\dot{\theta})^2 \right\}$$

5/ Calculer la grandeur suivante :  $\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial E_c(M/R_0)}{\partial \dot{\theta}} \right] - \frac{\partial E_c(M/R_0)}{\partial \theta}$  2.5 point

On a d'une part :  $\frac{\partial E_c(M/R_0)}{\partial \dot{\theta}} = m [ -(\gamma_0 t + V_0)L\cos\theta + L^2\dot{\theta} ] \leftarrow (0.5 pt)$

et d'autre part :  $\frac{\partial E_c(M/R_0)}{\partial \theta} = m [ (\gamma_0 t + V_0)L\dot{\theta}\sin\theta ] \leftarrow (0.5 pt)$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial E_c(M/R_0)}{\partial \dot{\theta}} \right] - \frac{\partial E_c(M/R_0)}{\partial \theta} = m \left\{ -\gamma_0 L\cos\theta + (\gamma_0 t + V_0)L\dot{\theta}\sin\theta + L^2\ddot{\theta} \right. \\ \left. - m [ (\gamma_0 t + V_0)L\dot{\theta}\sin\theta ] \right\} \\ = m [ L^2\ddot{\theta} - \gamma_0 L\cos\theta ] \leftarrow (1.5 pt)$$

6/ Déterminer l'expression de la force généralisée  $Q_\theta$  associée à la coordonnée  $\theta$ . 2.5 point

La force généralisée  $Q_\theta$  associée à la coordonnée généralisée  $\theta$  est donnée par :

$$Q_\theta = \left( \vec{T} + m\vec{g} \right) \cdot \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} \Big|_{t \text{ fixe}} = m \vec{v}_c \cdot \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} = L [ -\cos\theta\vec{e}_r + \sin\theta\vec{e}_\theta ]$$

(1 pt)

On a :  $\vec{T} \cdot \frac{\partial \vec{OR}}{\partial \theta} = -TL [-\sin \theta \vec{e}_1 - \cos \theta \vec{e}_2] [-\cos \theta \vec{e}_1 + \sin \theta \vec{e}_2] = 0$  (0.75 pt)

$\Rightarrow Q_\theta = m\vec{g} \cdot \frac{\partial \vec{OR}}{\partial \theta} = -mg \vec{e}_2 \cdot L [-\cos \theta \vec{e}_1 + \sin \theta \vec{e}_2] = -mgL \sin \theta$  (0.75 pt)

7/ Etablir alors l'équation de Lagrange de deuxième espèce associée à la coordonnée  $\theta$ .

2.5 point

$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial E_c(M/R_0)}{\partial \dot{\theta}} \right] - \frac{\partial E_c(M/R_0)}{\partial \theta} = Q_\theta \leftarrow (1.5 \text{ pt})$

$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta - \frac{\gamma_0}{L} \cos \theta = 0 \leftarrow (1 \text{ pt})$

8/ Trouver la position d'équilibre dans le repère relatif  $R_A(A, x, y, z)$  lié à l'extrémité mobile  
A. Etudier le cas particulier donné par la condition:  $\gamma_0 = g$ . (2 points)

La position d'équilibre relatif est donnée par :

$\theta_{eq} = 0 \Rightarrow \tan \theta_{eq} = \frac{\gamma_0}{g}$

$\Rightarrow \theta_{eq} = \arctan\left(\frac{\gamma_0}{g}\right) \leftarrow (1 \text{ pt})$

Cas particulier : si  $\gamma_0 = g \Rightarrow \theta_{eq} = \frac{\pi}{4} \text{ rad} \leftarrow (1 \text{ pt})$



CONTRÔLE FINAL DE VIBRATIONS / SESSION.1 / 26 DEC 2018

(DURÉE : 45min)  
« Correction de l'épreuve et barème »

Nom : .....	Prénom : .....
CNE: .....	Lieu du Contrôle : .....
	Groupe : .....

Sujet / Enoncé:

Le lagrangien  $L$  d'un oscillateur harmonique mécanique forcé, non amorti à un seul degré de liberté est donné par :

$$L = \dot{\varphi}^2(t) - 10\sqrt{2}[1 - \cos\varphi(t)] + \varphi(t)\sqrt{2}\cos(\omega t)$$

Où  $\varphi(t)$  est un petit angle et  $\omega$  est la pulsation de l'excitation extérieure.

- 1°) Interpréter les termes du lagrangien  $L$ .
- 2°) En utilisant les équations canoniques de Hamilton, déterminer l'équation du mouvement de l'oscillateur.
- 3°) Calculer la valeur numérique de la pulsation propre du système oscillant.
- 4°) Donner la valeur de  $\omega$  qui fait apparaître le phénomène de résonance.
- 5°) A l'aide de la technique de la transformation de Carson-Laplace, trouver dans le cas de la résonance, l'expression de l'angle  $\varphi(t)$  en fonction du temps  $t$ , avec  $\varphi(t=0)=0$ ,  $\dot{\varphi}(t=0)=0$

On donne :

$$CL[\cos(at)] = \frac{p^2}{(p^2 + a^2)} \quad ; \quad CL\left[\frac{1}{2b}(\sin(bt) - bt\cos(bt))\right] = \frac{p^2}{(p^2 + b^2)}$$

Réponses

- 1/ Le premier terme représente l'énergie cinétique de l'oscillateur.  
Le second terme représente l'énergie potentielle du poids de l'oscillateur.  
Le dernier terme représente l'énergie potentielle de la force extérieure appliquée à l'oscillateur.

- 2/ Les équations canoniques de Hamilton sont :

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad \text{et} \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} \quad (1)$$



où  $H$  est l'hamiltonien du système donné par:

2pts 
$$H = H(p, \varphi) = p\dot{\varphi} - L \quad (2)$$

avec  $L$  est le lagrangien de l'oscillateur donné par:

$$L = \dot{\varphi}^2 - 10\sqrt{2}(1 - \cos\varphi) + \varphi\sqrt{2}\cos(\omega t) \quad (3)$$

et  $p$  est le moment conjugué défini par

0.5pt 
$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \quad (4)$$

↳ Calculons l'hamiltonien  $H$ :

$$H = p\dot{\varphi} - L$$

Comme  $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \Rightarrow p = 2\dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{p}{2} \quad (5)$

En utilisant (3) et (5), on obtient

$$H = p \cdot \left(\frac{p}{2}\right) - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + 10\sqrt{2}(1 - \cos\varphi) - \varphi\sqrt{2}\cos(\omega t)$$

2pt d'où 
$$H = \frac{p^2}{4} + 10\sqrt{2}(1 - \cos\varphi) - \varphi\sqrt{2}\cos(\omega t) \quad (6)$$

Les équations canoniques (1) donnent:

\*  $\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{p}{2} \Rightarrow p = 2\dot{\varphi} \quad (7)$

1pt \*  $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} \Rightarrow -10\sqrt{2}\sin\varphi + \sqrt{2}\cos(\omega t) \quad (8)$

En tenant compte de (7), on a

$$2\ddot{\varphi} = -10\sqrt{2}\sin\varphi + \sqrt{2}\cos(\omega t)$$

Soit:

1pt 
$$\ddot{\varphi} + 5\sqrt{2}\sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\omega t) \quad (9)$$

Comme l'angle  $\varphi$  est petit, alors  $\sin\varphi \approx \varphi$  et l'équation (9) se réduit à

0.5pt 
$$\ddot{\varphi} + 5\sqrt{2}\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\omega t) \quad (10)$$

On a donc:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\omega t) \quad (11)$$



1,5 pt  
3/

avec  $\omega_0^2 = 5\sqrt{2}$  ;  $\omega_0 \approx 2,66 \text{ rad/s}$  est la pulsation propre du système oscillant.

2 pts  
4/

Le phénomène de résonance apparaît si  $\omega = \omega_0 = 2,66 \text{ rad/s}$ .

5/

Calculer l'angle  $\varphi(t)$ .

On applique la technique de la transformation de Carson-Laplace.

$$\mathcal{CL}[\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi] = \mathcal{CL}\left[\frac{\sqrt{2}}{2} \cos(\omega t)\right]$$

$$\mathcal{CL}[\ddot{\varphi}] + \omega_0^2 \mathcal{CL}[\varphi] = \frac{\sqrt{2}}{2} \mathcal{CL}[\cos(\omega t)]$$

$$\text{ou } \mathcal{CL}[\varphi] \equiv \varphi(p) = p \int_0^{+\infty} \varphi(t) e^{-pt} dt$$

$$\mathcal{CL}[\ddot{\varphi}] = -p^2 \varphi(p) - p^2 \varphi(t=0) - p \dot{\varphi}(t=0)$$

$$\text{ou } \varphi(t=0) = \dot{\varphi}(t=0) = 0, \quad \text{et } \mathcal{CL}[\cos(\omega t)] = \frac{p}{(p^2 + \omega^2)}$$

et dans le cas de la résonance on a :  $\omega = \omega_0$

d'où

$$-p^2 \varphi(p) + \omega_0^2 \varphi(p) = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{p^2}{(p^2 + \omega_0^2)}$$

ou

$$\varphi(p) = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{p}{(p^2 + \omega_0^2)^2}$$

4 pts

L'expression de l'angle  $\varphi(t)$  en fonction du temps  $t$ , s'obtient par l'intermédiaire de la transformation inverse de Carson-Laplace, soit :

$$\varphi(t) = \mathcal{CL}^{-1}[\varphi(p)] = \frac{\sqrt{2}}{2} \mathcal{CL}^{-1}\left[\frac{p^2}{(p^2 + \omega_0^2)^2}\right]$$

Par application de la form.  $\mathcal{CL}^{-1}\left[\frac{p^2}{(p^2 + b^2)^2}\right] = \frac{1}{2b^3} [\sin(bt) - bt \cos(bt)]$

avec  $b = \omega_0$ , on obtient :

$$\varphi(t) = \frac{\sqrt{2}}{4\omega_0^3} [\sin(\omega_0 t) - \omega_0 t \cos(\omega_0 t)]$$

$$\varphi(t) = 0,02 [\sin(2,66 t) - 2,66 t \cos(2,66 t)]$$

1 pt

1 pt