

programme

- I - Introduction Mathématique (TD)
- II - CINÉMATIQUE DU POINT Matériel
- III - Dynamique Du point Matériel

II - Cinématique du point Matériel

1. Introduction

la mécanique : est le domaine de la physique qui étudie le mouvement des systèmes de matériels. Dans l'étude menée on doit avoir :

- le corps de masse m , de géométrie quelconque, quelconque dont on étudie le mouvement ramené à un point matériel M qui est le centre de masse du corps. On parle dans ce cas du "point matériel".
- la vitesse du corps étudié est négligeable devant celle de la lumière " c ".
- les longueurs intervenant (dimension du système, distances parcourues) sont très grandes devant l'échelle atomique "angström".

Cette partie de la mécanique est appelée "mécanique classique du point".

2. Références et référentiels

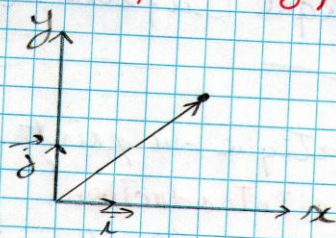
2.1 - Répère

pour décrire le mouvement d'un point Matériel, il faut un repère

- dans le temps, il faut donc choisir une origine

des temps.

- dans l'espace. Il faut choisir un repère, c'est à dire un point pris comme origine de l'espace associé à une base de vecteurs "exemple (\vec{i}, \vec{j}) " dans le repère cartésien"



2-2. Base de vecteurs

Définition: Une base de vecteurs est ensemble de vecteurs engendrant tous les autres.

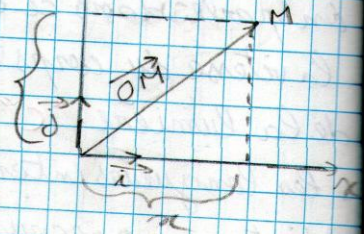
(Vecteurs position, vecteurs vitesse, accélération) seront une combinaison linéaire de ces vecteurs de base

$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

\vec{OM} : vecteur position

$x\vec{i}$: projection du vecteur position sur l'axe ox

$y\vec{j}$: projection du vecteur position sur l'axe oy



On peut écrire \vec{OM} d'une autre manière

$$\vec{OM} = (\vec{OM} \cdot \vec{i})\vec{i} + (\vec{OM} \cdot \vec{j})\vec{j} \Rightarrow \vec{OM} = [(x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot \vec{i}]\vec{i} + [(x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot \vec{j}]\vec{j}$$

2-3. Référentiels

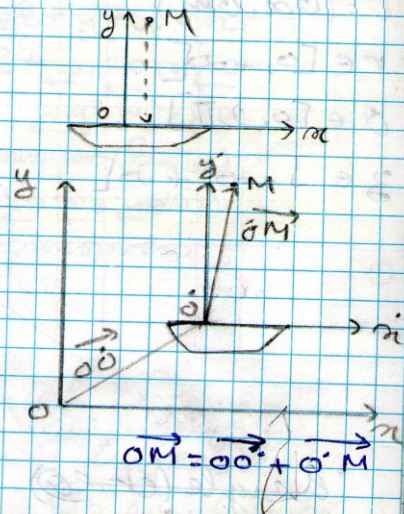
Définition: Un référentiel est un espace fixe, dans lequel un observateur décrit le mouvement d'un système à l'aide de repère spatial et temporel

Exemple: balle lâchée du haut du mât

du bateau en mouvement rectiligne uniforme

- Mouvement de la balle dans le référentiel lié au bateau

- mouvement de la balle dans le référentiel lié au quai



Système de coordonnées

I. coordonnées Cartésiennes

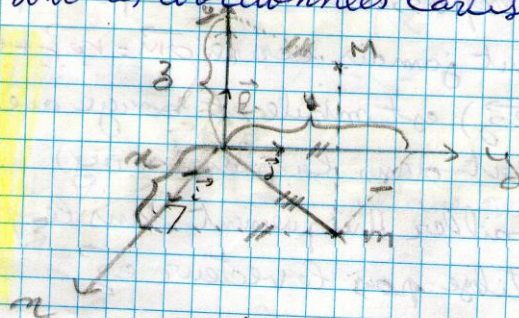
C'est une base orthonormée directe c'est à dire quelle est constituée par 3 vecteurs 1 deux à deux, Unitaires

Répère Cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ O étant l'origine de repère

$$M: \vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \rightarrow \vec{OM}(x, y, z)$$

(x, y, z) sont les coordonnées Cartésiennes de M

$$\begin{aligned} \vec{i} \wedge \vec{j} &= \vec{k} \\ \vec{j} \wedge \vec{k} &= \vec{i} \\ \vec{k} \wedge \vec{i} &= \vec{j} \end{aligned}$$



2. Coordonnées cylindriques

La base cylindrique est constituée de 3 vecteurs $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$. C'est une base orthonormée directe.

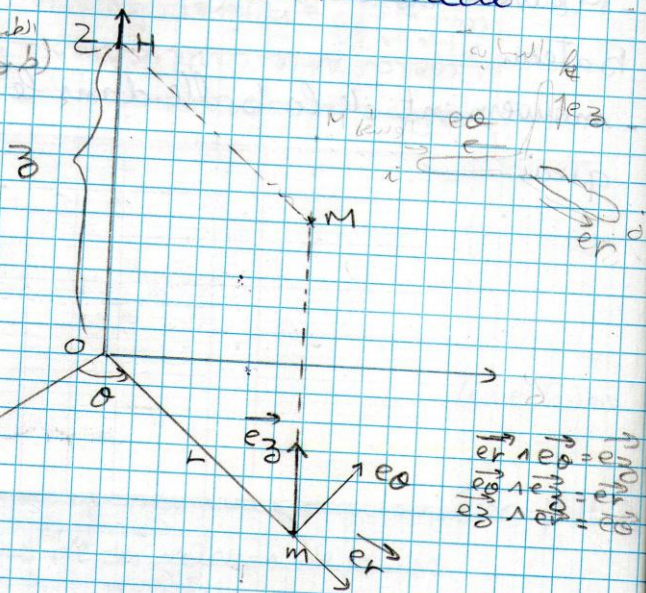
$$\vec{r} = \overrightarrow{OM}$$

$$\theta = (\vec{Ox}, \vec{Om})$$

$$r \in [0, +\infty[$$

$$\theta \in [0, 2\pi]$$

$$z \in]-\infty, +\infty[$$



Angle $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$

$\angle(\vec{e}_m, \vec{e}_r) = \theta$: est appelé angle polaire et on a $r = \|\vec{OM}\|$

H : est la projection orthogonale de M sur Oz et m est projection orthogonale de M sur (O, x, y)

$$\vec{OM} = \vec{Om} + \vec{mM}$$

$$\vec{OM} = \|\vec{Om}\| \cdot \vec{e}_r + z \vec{e}_z$$

$$\vec{OM} = r \vec{e}_r + z \vec{e}_z \Rightarrow \vec{OM}(r, \theta, z)$$

Remarque : l'expression \vec{OM} ne comporte pas de composant sur \vec{e}_θ , il ne faut jamais écrire $\vec{OM} = r \vec{e}_r + \theta \vec{e}_\theta + z \vec{e}_z$ la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ est mobile et bouge avec le point M. $M(r, \theta, z)$ mouvement dans le plan (x, y) . Il arrive de travailler uniquement dans le plan dans ce cas, on ne utilise pas le vecteur \vec{e}_z .

$$\vec{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_3, z=0 \Rightarrow \vec{e}_3 \text{ on l'utilise pas}$$

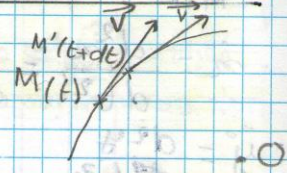
on parle alors de base plane. D'où

$$\vec{OM} = r\vec{e}_r$$

II/ Description du MOUVEMENT D'UN POINT vitesse et l'ACCELERATION

III- Définition des vecteurs vitesse et accélération

on définit le vecteur vitesse du point M dans un référentiel R par la relation



$$(\vec{v}_M)_R = \vec{v}_M|_R = \frac{d\vec{OM}}{dt}|_R$$

مشتق شيفاع الموضع
بالنسبة للزمن

avec O un point fixe du référentiel R

le vecteur vitesse est colinéaire à la trajectoire M

Remarque 1: $OM = r$ (cas d'un mouvement circulaire)
($v \neq 0$)

Remarque 02: Un point animé d'un mouvement uniforme si la norme de sa vitesse est constante

1- Accélération

on définit l'accélération du point M dans un référentiel R par la relation

$$(\vec{a}_M)_R = \vec{a}_M|_R = \frac{d(\vec{v}_M|_R)}{dt}|_R$$

avec O fixe dans R

Remarque:

$\|\vec{v}\| = v = \text{cste}$ n'implique pas que l'accélération sont nulle

1- Expression en Coordonnées Cartésiennes

$$\vec{v}_{M/R} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} \quad / \quad \dot{x} = \frac{dx}{dt}, \dot{y} = \frac{dy}{dt}, \dot{z} = \frac{dz}{dt}$$

$$\vec{v}_{M/R} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

$$\vec{v}_{M/R}(x, y, z)$$

$$\vec{a}_{M/R} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d(\frac{dx}{dt})}{dt} = \frac{d(\dot{x})}{dt}$$

$$\ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$\ddot{z} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

$$\vec{a}_{M/R} = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}), \vec{a}_{M/R} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}$$

1- Expression en coordonnées cylindrique

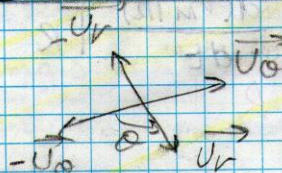
$$\vec{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{k} \quad / \quad O\vec{u}_0 \rightarrow \text{axe } z$$

$$\vec{v}_{M/R} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{k} \quad (3)$$

$$\vec{v}_{M/R} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\vec{u}_r + z\vec{k}) \quad (1)$$

$$= \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt} + \dot{z}\vec{k} \quad (2) \quad / \quad \frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d\vec{u}_r}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

Remarque



$$\frac{d\vec{u}_r}{d\theta} = \vec{u}_\theta$$

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = -\vec{u}_r$$

$$\frac{d}{dt}(A \cdot B \cdot C)$$

$$\frac{dA}{dt} \cdot B \cdot C +$$

$$\frac{dB}{dt} \cdot A \cdot C +$$

$$\frac{dC}{dt} \cdot A \cdot B$$

Accélération

$$\vec{a}_M|_R = \frac{d\vec{v}_M|_R}{dt} = \frac{d^2 \vec{OM}|_R}{dt^2}$$

$$= \frac{d(\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{k})}{dt}$$

$$(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta + \ddot{z}\vec{k}$$

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta / \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{u}_r$$

Rappel:

I. Vecteur vitesse

à vitesse moyenne:

$$\vec{v}_{\text{moy}}(M) = \frac{\vec{OM}^2(t_2) - \vec{OM}^1(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{OM}_2 - \vec{OM}_1}{t_2 - t_1}$$

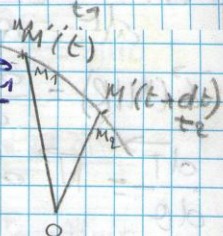
$$\vec{OM}_2 - \vec{OM}_1 = \vec{M_1O} + \vec{OM}_2 = \vec{M_1M_2}$$

$$\vec{v}_{\text{moy}}(M) = \frac{\vec{M_1M_2}}{t_2 - t_1}$$

à vitesse instantanée

$$\vec{v}_M|_R = \lim_{\substack{t_2 \rightarrow t_1 \\ \Delta t \rightarrow 0}} \vec{v}_{\text{moy}}(M) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{OM}(t+\Delta t) - \vec{OM}(t)}{\Delta t}$$

donc: $\vec{v}_M|_R = \frac{d\vec{OM}}{dt}|_R$



:- Vitesse algébrique:

Dans ce cas, c'est la trajectoire elle-même qui sert à séparer le mobile à l'aide de l'abscisse curviligne (ou coordonnée intrinsèque) du point M

$$DS = \text{Arc}(M(t+dt), M(t))$$

Le vecteur vitesse est porté, par le vecteur unitaire \vec{T} tangent à la trajectoire



la vitesse algébrique de M est $v = \frac{ds}{dt}$
 $\vec{v} = v \vec{T} = \frac{ds}{dt} \vec{T}$

$$\vec{v}(M/R) = \frac{ds}{dt} \vec{T}$$

(\vec{T}, \vec{N}) (Vecteur unitaire)

II Vecteur accélération

$$\vec{a}(M/R) = \frac{d\vec{v}(M/R)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \vec{T} \right)$$

$$\vec{a}(M/R) = \frac{d^2s}{dt^2} \vec{T} + \frac{ds}{dt} \cdot \frac{d\vec{T}}{dt}$$

$$\text{or } \frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{d\vec{T}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \vec{N}$$

$$\vec{a}(M/R) = \frac{d^2s}{dt^2} \vec{T} + \dot{\theta} \frac{ds}{dt} \vec{N}$$

$\frac{d\vec{T}}{d\theta} = \vec{N}$ désigne le vecteur normal dirigé

vers le centre de la courbure de la trajectoire

$$\Delta s = r \Delta \theta \Rightarrow ds = R d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{1}{R} ds$$

$$\text{donc } \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{R} \frac{ds}{dt} = \frac{v}{R}$$

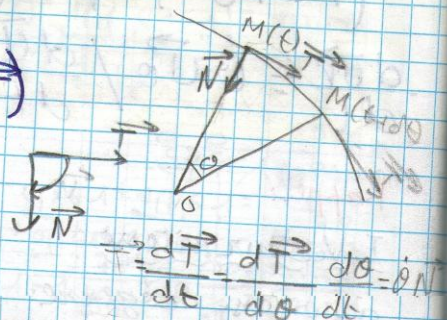
$$\frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{v}{R} \vec{N}$$

le vecteur accélération s'écrit

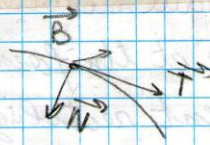
$$\vec{a}(M/R) = \frac{dv}{dt} \vec{T} + \frac{v^2}{R} \vec{N}$$

$$\frac{v^2}{R} \vec{N} = \frac{ds}{dt} \frac{v}{R} \vec{N}$$

$$\vec{a}(M/R) = \underbrace{\frac{dv}{dt} \vec{T}}_{\vec{a}_T} + \underbrace{\frac{v^2}{R} \vec{N}}_{\vec{a}_N}$$



Remarque



Le repère $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ est le repère de Frenet

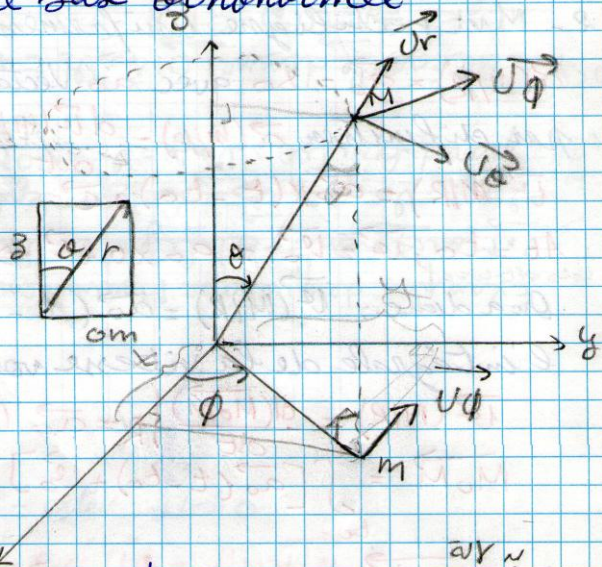
$\vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N} \rightarrow$ le vecteur Binormale

1- Les coordonnées sphériques

Remarque les coordonnées sphériques sont beaucoup moins utilisées que les coordonnées cartésiennes et cylindriques car leur utilisation est beaucoup délicate

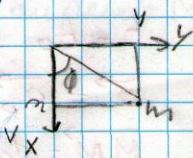
La base sphérique est constituée de 3 vecteurs $(\vec{U}_r, \vec{U}_\theta, \vec{U}_\phi)$ c'est une base orthonormée directe

$$\begin{aligned} M & \left| \begin{array}{l} r \\ \theta \\ \phi \end{array} \right. \\ \vec{OM} &= r \vec{U}_r \\ z &= r \cos \theta \\ \rho_m &= r \sin \theta \end{aligned}$$



Expression des coordonnées cartésiennes en fonction des coordonnées sphériques

$$\begin{cases} x = \rho_m \cos \phi = r \sin \theta \cdot \cos \phi \\ y = \rho_m \sin \phi = r \sin \theta \cdot \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$



Exemples de quelques mouvements particulières

1. Mvt rectiligne et uniforme dans (IR)

pour un mouvement rectiligne, le vecteur vitesse garde une direction constante

$$\vec{v}(M/R) = \vec{v}_0 \text{ avec } \vec{v}_0 = \text{vecteur constant}$$

par définition: $\vec{v}(M/R) = \vec{v}_0 = \frac{d\vec{OM}}{dt} \Big|_R$

l'intégrale donne $\vec{OM} = \vec{v}_0 t + \vec{c}$

avec \vec{c} : constante d'intégration, on la détermine grâce aux conditions initiales de l'expérience

At $t = t_0$, $M(t_0) = M_0$

$$\vec{OM}_0 = \vec{v}_0 t_0 + \vec{c} \Rightarrow \vec{c} = \vec{OM}_0 - \vec{v}_0 t_0$$

D'où $\vec{OM} = \vec{v}_0 (t - t_0) + \vec{OM}_0 \Leftrightarrow$

$$\boxed{M_0 M(t) = \vec{v}_0 (t - t_0)}$$



2. Mvt rectiligne uniformément accéléré

$$\vec{a}(M/R) = \vec{a}_0 = \text{const} \text{ avec } \vec{a}_0 \text{ vecteur constant}$$

par définition $\vec{a}(M/R) = \frac{d\vec{v}(M/R)}{dt} \Big|_R = \vec{a}_0$

$$\vec{v}(M/R) = \vec{a}_0 (t - t_0) + \vec{c}$$

At $t = t_0$, $\vec{v} = \vec{v}_0 = \vec{a}_0 x_0 + \vec{c} \Rightarrow \vec{v}_0 = \vec{c}$

On a donc: $\vec{v}(M/R) = \vec{a}_0 (t - t_0) + \vec{v}_0$

l'intégrale de la vitesse vous donne l'est de Mvt

$$\vec{v}(M/R) = \frac{d(\vec{M_0 M})}{dt} \Big|_R = \vec{a}_0 (t - t_0) + \vec{v}_0$$

$$\vec{M_0 M} = \int_{t_0}^t [\vec{a}_0 (t - t_0) + \vec{v}_0] dt$$

$$\Rightarrow \vec{M_0 M} = \vec{a}_0 \frac{(t - t_0)^2}{2} + \vec{v}_0 (t - t_0) + \vec{c}$$

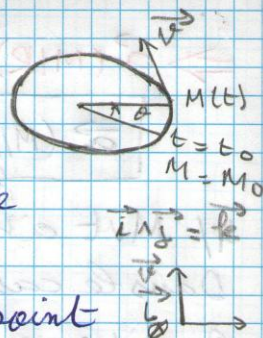
t = t0 $\Rightarrow M = M_0$

$$\vec{0} = \vec{a}_0 x_0 + \vec{v}_0 x_0 + \vec{c} \Rightarrow \vec{c} = \vec{0}$$

$$\vec{M_0 M} = \frac{1}{2} \vec{a}_0 (t - t_0)^2 + \vec{v}_0 (t - t_0) \Leftrightarrow \text{l'éq de mvt RUA}$$

a) Vectors ~~(lib)~~ rotation

الكحل



Il est caractérisé par:

- direction: ^{مستقيم الخط} colinéaire de l'axe de cercle ^{الدائرة}

- sens: donne le sens de rotation du point

- norme : vitesse Angulaire du point,

- angle dont tourne la point par Unité de temps (rad/s)

b) expression de la vitesse et de l'accélération

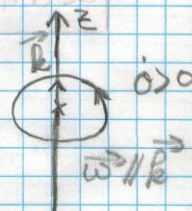
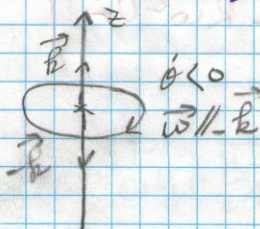
Expression de $\vec{\omega}$ vecteur de rotation

\vec{w} est colinéaire à \vec{k}

$$|\vec{\omega}| = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$$

Sens du vecteur: si $\dot{\alpha} > 0$, $\vec{\omega}$ est vers le haut (+ \vec{k})

- si $\theta < 0$, $\vec{w} \parallel \text{le bas}(-\vec{k})$



$$\vec{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{k} \quad / \quad \text{Mvt circulaire}$$

$$\vec{OM} = r \vec{U}_r$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = r \vec{U}_r + r \dot{\alpha}' \vec{U}_\theta + \dot{z} \vec{k} \quad / \dot{z} = 0$$

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{U}_r + r \dot{\theta} \vec{U}_\theta$$

Mvt circulaire $R = r = \text{cte} \rightarrow v = 0$

On a donc : $\vec{v}(M/k) = R \circ \vec{U} \circ R^{-1} = R \omega \vec{U} \circ R^{-1}$

$\vec{v}(M/R)$ est un vecteur tangent au cercle au point M

$$\vec{a}(M/R) = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\vec{U}_r + \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\phi})\vec{U}_\phi + \ddot{z}\vec{k}$$

$$r=R=\text{cte} \quad \dot{z}=0 \quad \Rightarrow \ddot{r}=\ddot{r}=0$$

$$r=R = \text{cte} \quad \dot{\gamma} = 0 \quad \ddot{\gamma} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{a}(M/R) = -R \theta'^2 \vec{U}_r = -R \omega^2 \vec{U}_r$$

$$\boxed{\vec{a}(M/R) = -R \omega^2 \vec{U}_r}$$

4/ Mvt circulaire uniforme

Dans le cas d'un Mvt Circulaire uniforme

On a $\omega = \text{cte}$ et $\theta' = \omega = \text{cte}$

$\frac{d\theta}{dt} = \theta' = \omega \rightarrow \omega \text{ int\'egr\'e et on a :}$

$$d\theta = \omega dt \Rightarrow \theta = \omega t + c$$

On d\'etermine c avec les conditions initiales

$$\text{A } t = t_0 \text{ on a } \theta = \theta_0 \Rightarrow \theta_0 = \omega t_0 + c \Rightarrow c = \theta_0 - \omega t_0$$

$$\theta = \omega t + \theta_0 - \omega t_0$$

$$= \theta_0 + \omega(t - t_0)$$

$$\boxed{\vec{a}(M/R) = -R \omega^2 \vec{U}_r}$$

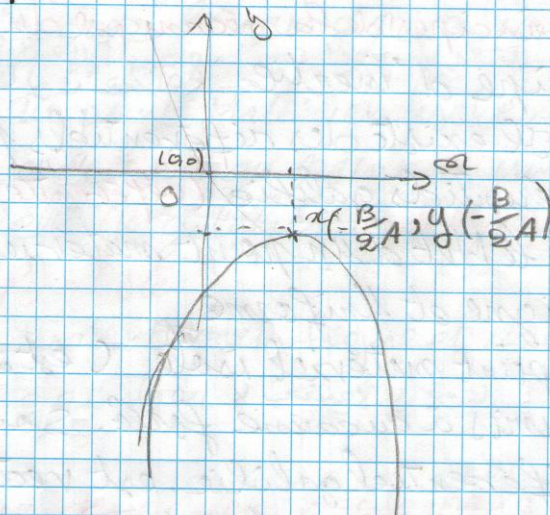
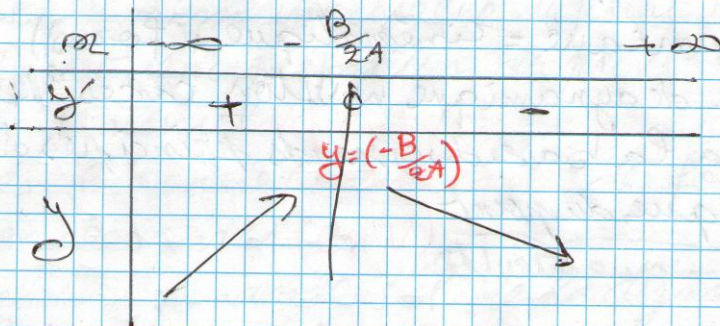
$$y' = f'(x) = 2Ax + B = 0$$

$$\Rightarrow x = -\frac{B}{2A}$$

$$y' > 0 \Rightarrow 2Ax + B > 0 \Rightarrow x > -\frac{B}{2A}$$

$$B > -2Ax$$

$$-2Ax < B \Rightarrow x < -\frac{B}{2A}$$



CHAPITRE III دراسة الحركة مع إطار المرجع

Dynamique du point Matériel en référentiel galiléen

- Introduction: La cinématique du point a permis de décrire le Mvt d'un point, mais sans s'occuper de ses causes.

⇒ la dynamique qui permet de relier le Mvt à ces causes on peut donc écrire:

"(dynamique = Cinématique + forces)"

On parle de dynamique newton, car ces Newton qui est à la base des grands principes de la mécanique du point.

mécanique newton

I - Les 3 principes de la mécanique du point:

1. principe d'inertie : مبدأ القصور / قانون القصور

Énoncé: Il existe des référentiels privilégiés, appelés référentiels galiléen (référentiels inertiels) dans lesquels le Mvt d'un point matériel isolé est rectiligne et uniforme.

Soit M un point matériel isolé "C'est à dire qu'il n'est soumis à aucune force". Son Mvt dans un référentiel galiléen, est rectiligne et uniforme. Autrement dit: $\vec{r}(M/P) = \vec{c} + t\vec{v}$

Remarque: Tous les référentiels galiléens sont en Mvt de translation rectiligne et uniforme les uns par rapport aux autres.

2. 2^{ème} loi de Newton principe fondamental de la dynamique (PFD)

Remarque: cette formule, est à connaître PAR COEUR, elle constitue le point de départ de la dynamique.

Dans un référentiel galiléen (R) on a :

$$m \vec{a}(M/R) = \vec{F}$$

m : est la masse inertielle du point Matériel M (en kg)
 $\vec{a}(M/R)$: est l'accélération du point.

Matériel M (en m/s^2)

\vec{F} : est la somme (résultante) des forces exercées sur M (en N)

la relation fondamentale de la dynamique

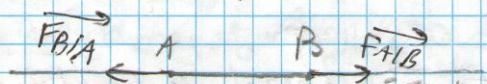
est cohérente avec le principe d'inertie

- Si M est un point Matériel isolé, $\vec{F} = \vec{0}$; on applique le PFD au point M dans le référentiel (R) galiléen: $m \vec{a}(M/R) = \vec{0} \Rightarrow \vec{a}(M/R) = \vec{0}$
 $\Rightarrow \vec{v}(M/R) = \vec{cste}$

M a donc un Mvt rectiligne et uniforme donc (R) est galiléen

3. Principe des actions réciproques

Soient A et B deux point Matériels



$\vec{F}_{A/B} = \vec{f}(A \rightarrow B)$ est la force exercée A sur B

$\vec{F}_{B/A} = \vec{f}(B \rightarrow A)$ " " " B " A

$$\vec{F}_{A/B} = -\vec{F}_{B/A}$$

$$\|\vec{F}_{A/B}\| = \|\vec{F}_{B/A}\|$$

$\vec{F}_{A/B}$ et $\vec{F}_{B/A}$ sont colinéaires

Exemple de quelques problèmes

I - Poids d'un corps - chute libre

le poids a pour formule $\vec{P} = m\vec{g}$

cette force est exercée sur tout point au voisinage de la surface terrestre

\vec{g} est le champ de pesanteur terrestre son origine principale est l'attraction gravitationnelle terrestre mais aussi de la rotation de la terre autour de son axe Nord/Sud



Propriétés de \vec{g} :

\vec{g} est dirigé vers le centre de la terre

$\|\vec{g}\| = 9.81 \text{ m/s}^2$ en Algérie

dans les calculs approximative on la prend égale à 10 m/s^2

Remarque

en réalité \vec{g} dépend de l'altitude et latitude

حرارة السقوط الحر تكون في حالة السقوط أو النزول (سقوط حر)
 2/ chute libre

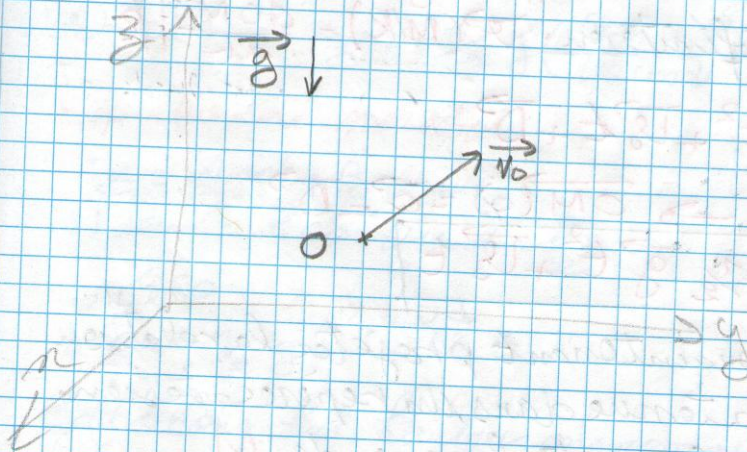
problème:

$t=0$. On lance M à partir du point O avec une vitesse initiale \vec{v}_0 dans le référentiel terrestre (R)

- Quelle est la trajectoire de M dans (R) ?

Marche à suivre: 1) On prend le référentiel d'étude (1) مختار مرجع للدراسة

2) On fait un joli dessin (ne réglez pas, ça se révèle souvent utile voir en fait pour se sortir dynamique)



3- le référentiel terrestre suppose galiléen (نعتبره)

4- On définit le système matériel étudié (نحدد الجسم المراد دراسته)

5- On effectue le bilan de forces (نقوم بموازنة القوى)
 Bilan des forces: poids $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$

de plus on négligera le frottement d'air.

- 6. On peut maintenant appliquer le PFD au point M dans (R) galiléen: $m\vec{a}(M/R) = \vec{F} = m\vec{g}$

$$\Downarrow$$

$$m\vec{a}(M/R) = m\vec{g}$$

$$\vec{a}(M/R) = \vec{g}$$

$$\int \vec{a}(M/R) = \int \vec{g}$$

$$\vec{v}(M/R) = \vec{g}t + \vec{c}$$

Conditions initiales $t=0, v=v_0$

$$\Downarrow$$

$$\vec{v}(M/R) = \vec{g} \times 0 + \vec{c} = \vec{v}_0 / \vec{v}_0 = \vec{c}$$

$$\vec{v}(M/R) = \vec{g}t + \vec{v}_0$$

par définition: $\vec{v}(M/R) = \frac{d\vec{OM}}{dt} | R$

$$\vec{OM} = \frac{1}{2} \vec{g} t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{D}$$

$$\text{A } t=0, M=O \rightarrow \vec{OM}(0) = \vec{O} = \vec{D}$$

$$\boxed{\vec{OM} = \frac{1}{2} \vec{g} t^2 + \vec{v}_0 t}$$

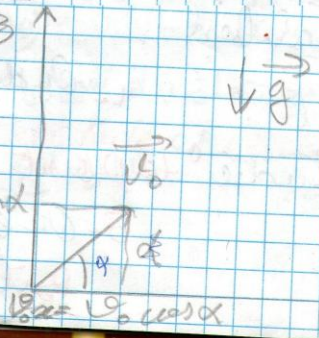
Nous allons maintenant projeter la relation vectorielle obtenue dans un repère cartésien, pour obtenir les eqts horaires de M

نلاحظ أن الحركة جزئية

$$\vec{OM} = \frac{1}{2} \vec{g} t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{D}$$

$$\text{A } t=0, M=O \rightarrow \vec{OM}_0 = \vec{O} = \vec{D}$$

$$\vec{OM} = \frac{1}{2} \vec{g} t^2 + \vec{v}_0 t$$



$$\vec{v} = \vec{g}t + \vec{v}_0 = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$$

En projetant on obtient

$$\vec{v} = \begin{cases} v_x = v_0 \cos(\alpha) \\ v_y = 0 \\ v_z = v_0 \sin(\alpha) - gt + v_0 \sin \alpha \end{cases}$$

ATT.

$$x = v_0 \cos(\alpha) \cdot t \quad \text{--- (1)}$$

$$y = 0$$

$$z = \frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin(\alpha) t \quad \text{--- (2)}$$

dans le cas ou $\alpha = \frac{\pi}{2}$

$$(1) \rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \quad \text{--- (3)}$$

$$(2) \xrightarrow{(3)} z = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right)^2 + v_0 \sin(\alpha) \left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right)$$

Equation de parabole

$$z = Ax^2 + Bx + C$$

Dans le cas ou $\alpha = \frac{\pi}{2}$

$$x = 0$$

$$z = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t$$

Calculons la hauteur maximale de la parabole

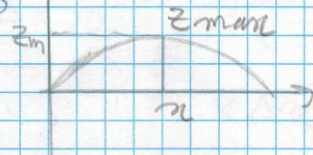
quand on est au sommet de la parabole

$$v_z = 0 \rightarrow -gt + v_0 \sin(\alpha) = 0$$

$$t_{\max} = \frac{v_0 \sin(\alpha)}{g}$$

$$z_{\max}(t_{\max}) = -\frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \sin \alpha}{g} \right)^2 +$$

$$v_0 \sin \alpha \left(\frac{v_0 \sin \alpha}{g} \right)$$



$$Z_{max} = \frac{-g}{2} \times \left(\frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2} \right) + \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g}$$

$$Z_{max} = \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g}$$

$$z=0 \Rightarrow -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin \alpha t = 0$$

$$t(-\frac{1}{2} g t + v_0 \sin \alpha) = 0$$

$t=0 \rightarrow$ point de tir (ici 0)

$$-\frac{1}{2} g t + v_0 \sin \alpha = 0$$

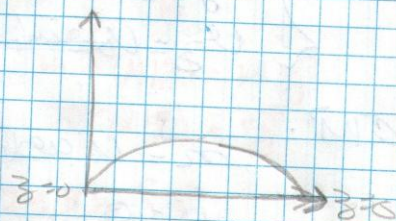
$$\Rightarrow t_2 = \frac{2 v_0 \sin \alpha}{g}$$

$$Z = v_0 \cos \alpha t \quad (1)$$

$$Z = v_0 \cos \alpha \cdot \frac{2 v_0 \sin \alpha}{g}$$

$$Z = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Calligon



$$\sin 2\alpha = 2 \cos \alpha \sin \alpha$$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \times \sin B$$

$$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \times \sin B$$

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A$$

$$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \sin B \cos A$$

$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$$

quelques forces en dynamique

1. Force d'interaction gravitationnelle

Soit M_1 et M_2 deux points matériels, de masses respectives m_1 et m_2

$$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{e}_r$$

m_1, m_2 , soit exprimé en kg

G : Constant Universelle

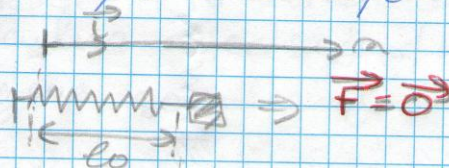
de gravitation ($6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$)

r : la distance entre M_1 et M_2 , exprimée en (m)

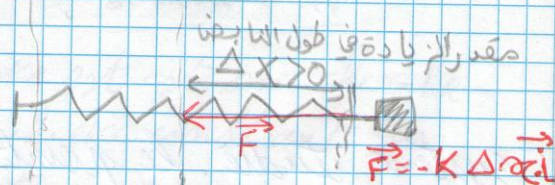
2. Force de rappel d'un ressort

Le ressort possède des propriétés élastiques, il retrouve sa forme initiale après application d'une force le déformant

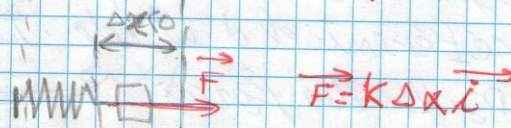
Au repos:



En EXTENSION:



EN COMPRESSION:



l_0 : est la longueur à vide (ou repos) du ressort

$$\Delta x = l - l_0$$

K : Constante de raideur de ressort (positive)

\vec{i} : Est un vecteur unitaire, colinéaire au ressort dirigé vers l'extérieur du ressort

On distingue 3 cas :

- en extension : $\Delta x > 0$ le ressort est étiré

$$\vec{F} = -K(l - l_0) \vec{i}$$

- en compression : $\Delta x < 0$, le ressort est comprimé

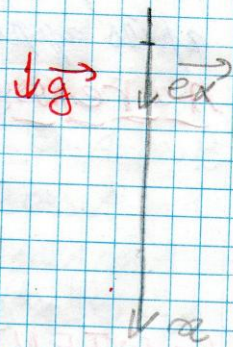
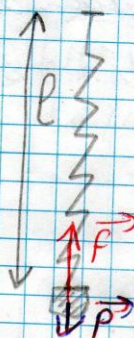
$$\vec{F} = K(l - l_0) \vec{i}$$

- en repos : $l = l_0$, le ressort est relaxé (relaché)

$$\vec{F} = \vec{0}$$

Exemple :

A $t=0$, on écarte M de sa position, d'équilibre et on le lance avec une vitesse initiale $l_0 \vec{v}_0$ verticale



système étudié : le point Matériel M

- référentiel d'étude : terrestre supposé galiléen

- Bilan des forces $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$

- le poids : $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$
- force de rappel du ressort sur M

$$\vec{F} = -k(l - l_0) \vec{e}_n$$

- On néglige les forces de frottement

On applique le PFD à M dans IR

$$m \vec{a}(M/R) = \sum \vec{F}_{ext}$$

$$m \vec{a}(M/R) = m \cdot \vec{g} - k(l - l_0) \vec{e}_n$$

$$\vec{a}(M/R) = \ddot{x} \vec{e}_n$$

$$\Rightarrow m \ddot{x} \vec{e}_n = m g \vec{e}_n - k(l - l_0) \vec{e}_n$$

$$m \ddot{x} \vec{e}_n = m g \vec{e}_n - k(x - l_0) \vec{e}_n$$

$$m \ddot{x} = m g - k(x - l_0)$$

$$\text{At } t=0 : x(0) = x_0, \vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_n = \dot{x}(0) \vec{e}_x$$

$$\Rightarrow x'(0) = v_0$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = g - \frac{k}{m}(x - l_0)$$

est différentielle dex d'ordre 2, linéaire,
à coefficient constant - avec second membre constant

Sa solution est:

$$x(t) = x_p + x_h$$

x_p : solution particulière avec second membre

x_h : " homogène son

On détermine d'abord la solution x_p :

quand le second membre est cste on cherche
une solution particulière constant, on
cherche x_p constant

$$x_p = \text{cste} \Rightarrow \dot{x}_p = 0, \ddot{x}_p = 0$$

$$\frac{k}{m} x_p = g + \frac{k}{m} l_0 \Rightarrow \boxed{x_p = g \frac{m}{k} + l_0}$$

- On détermine maintenant la solution homogène

On écrit l'éq sans second membre

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

$$\text{On pose } \omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow [\omega_0] = T^{-1}$$

$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$, c'est une eq d'un oscillateur harmonique, on retrouvera dans de nombreux problèmes.

$$x_h = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$$

La solution générale est x_p

$$x = x_p + x_h = g \frac{m}{k} + l_0 + A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$$

On détermine A et B à l'aide des conditions initiales

$$x(0) = x_0 \Leftrightarrow x_p + A \rightarrow \boxed{A = x_0 - x_p}$$

$$x'(0) = v_0$$

$$x' = -A \omega_0 \sin \omega_0 t + B \omega_0 \cos \omega_0 t$$

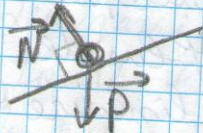
$$x'(0) = B \omega_0 = v_0 \Rightarrow \boxed{B = \frac{v_0}{\omega_0}}$$

$$\boxed{x(t) = x_p + (x_0 - x_p) \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t}$$

2. Réaction d'un support

a - sans frottement:

En absence de frottement, la réaction du support est toujours orthogonal au support, c'est pourquoi on parle de réaction normale du support et on écrit: $\vec{R} = \vec{N}$

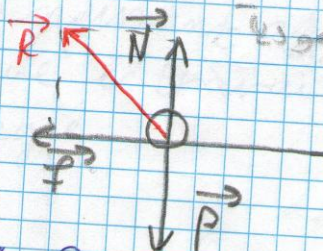


b - avec frottement:

Cette fois-ci la réaction du support comporte deux composantes

- 1 - composante normale (orthogonale) au support (la même que précédant)
- 2 - composante tangentielle au support (due à l'existence de frottement)

On écrit alors: $\vec{R} = \vec{N} + \vec{f}$



Remarque: la force de frottement s'oppose toujours au mouvement

C. frottement fluide

c'est une force de frottement intervenant entre un corps et un fluide (liquide, gaz)

Elle dépend de la vitesse relative de ce corps par rapport au fluide.

- On utilise deux modèles classiques pour définir la force de frottement fluide

- le premier modèle : est le modèle linéaire (faible vitesse)

$$\vec{F} = -K \cdot \vec{v}$$

- le deuxième modèle : est non linéaire et on l'utilise pour les grandes vitesses

$$\vec{F} = -K v^2 \vec{u}$$

le coefficient K dépend du fluide (et notamment de sa viscosité), et de la géométrie du corps

+ Travail et Energie +

En principe: les lois de Newton permettent de résoudre tous les problèmes de la mécanique classique.

Si on connaît les positions et les vitesses initiales des particules d'un système, ainsi que toutes les forces agissant sur elles.

On prévoit l'évolution du système au cours du temps.

Mais:

dans la pratique, on ne connaît pas toujours toutes les forces qui entrent en jeu et même si c'est le cas, les eqts à résoudre sont trop nombreuses ou trop compliquées.

Dans bien des cas des informations intéressantes concernant le système peuvent être obtenues plus simplement en faisant appel à des notions telles que le travail et l'énergie.