
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Centre Universitaire Nour Bachir El Bayadh
Institut des Sciences
Département de Technologie



Polycopié
Cours UEF 122 intitulé

**ASSERVISSEMENTS ECHANTILLONNES
ET REGULATION NUMERIQUE**

M^r GUETTAF Yacine
M^r BENDELHOUM Mohammed Sofiane

Avant-propos

Ce manuel de cours, intitulé « Asservissements échantillonnés et régulation numérique », est destiné aux étudiants en Master électrotechnique et en Master électronique des systèmes embarqués. Les informations contenues dans ce cours ont été choisies et organisées de la meilleure façon possible afin d'être exhaustives tout en étant également assimilable par l'ensemble des étudiants. Une organisation particulière a été mise sur la forme de ce manuel en respectant le canevas officiel de notre tutelle, ce qui permet d'en faciliter la compréhension.

Ce cours est organisé en quatre chapitres, dans le premier, on présente la modélisation des signaux et des systèmes échantillonnés. En deuxième chapitre, on traite le phénomène de stabilité et performances des systèmes échantillonnés asservis, le chapitre trois est consacré à la correction des systèmes échantillonnés asservis, et on termine ce cours par le dernier chapitre où on va aborder la représentation d'état des systèmes à temps discret.

Table des Matières

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE I

Modélisation des signaux et des systèmes échantillonnés

1.1 Introduction	3
1.2 Principes fondamentaux de l'échantillonnage des signaux	3
1.2.1 Peigne de Dirac	3
1.2.2 Théorème de Shannon	4
1.3 Exemples de signaux échantillonnés simples	5
1.3.1 Impulsion unité	5
1.3.2 Echelon unité	5
1.4 Transformée en z des signaux échantillonnés	6
1.4.1 Définition	6
1.4.2 Propriétés de la transformée en z	7
a) Linéarité	7
b) Théorème du retard	7
c) Théorème de la valeur finale	7
d) Multiplication par le temps	7
e) Changement d'échelle	7
1.5 Fonction de transfert en z	8
1.5.1 Relations entre échantillons de sortie et échantillons d'entrée : équation récurrente	8
1.5.2 Définition de la fonction de transfert en z	8
1.6 Transformée de Fourier à temps discret	9
1.6.1 Définition	9
1.6.2 Exemple	9
1.7 Comportement fréquentiel des systèmes échantillonnés	11
1.7.1 Principes généraux	11
1.7.2 Exemple	11
1.8 Relation entre les modèles à temps continu et à temps discret	12
1.8.1 Problématique	12
1.8.2 Équivalence à la dérivation	13
a) Définition	13
b) Exemple	13
1.8.3 Équivalence à l'intégration	14
a) Définition	14
b) Exemple	15
1.8.4 Équivalence modale	15
1.8.5 Équivalence d'une association de plusieurs systèmes	15

CHAPITRE II

Stabilité et performances des systèmes échantillonnés asservis

2.1 Mise en équation des asservissements échantillonnés	17
2.1.1 Fonction de transfert en boucle fermée	17
2.1.2 Relation temps continu – temps discret en boucle fermée	18

2.2 Stabilité des asservissements échantillonnés	19
2.2.1 Critère mathématique de stabilité	19
a) Énoncé du critère	19
b) Exemple : stabilité en boucle fermée d'un système du premier ordre	20
2.2.2 Critère algébrique de Jury	21
a) Énoncé du critère	21
b) Exemple : stabilité d'un système du second ordre	22
2.2.3 Influence de la fréquence d'échantillonnage sur la stabilité	23
a) Mise en évidence	23
b) Choix de la fréquence d'échantillonnage	24
2.3 Asservissements continus commandés ou corrigés en temps discret	24
2.3.1 Définition	24
2.3.2 Interfaçage entre un système discret et un système continu	25
2.3.3 Première méthode d'étude simple : recherche d'un système continu équivalent.	25
2.3.4 Deuxième méthode d'étude simple : recherche d'un système discret équivalent.	26
2.4 Précision des asservissements échantillonnés	26
2.4.1 Erreurs de position et de vitesse	26
2.4.2 Précision d'un système échantillonné du premier ordre	27
a) Calcul de l'erreur de position	27
b) Calcul de l'erreur de vitesse	28
c) Généralisation	28
2.5 Performances dynamiques d'un système échantillonné	29
2.5.1 Fonction de transfert échantillonnée équivalente à un système du second ordre..	29
2.5.2 Prévion des performances dynamiques	30
a) Principe	30
b) Exemple	30
c) Validation des résultats obtenus	32

CHAPITRE III

Correction des systèmes échantillonnés asservis

3.1 Principes généraux	33
3.1.1 Rappel du cahier des charges d'un asservissement	33
3.1.2 Rôle du correcteur	33
3.1.3 Correction numérique d'un système à temps continu	34
3.1.4 Problèmes spécifiques liés aux correcteurs numériques	34
3.2 Tentatives d'actions correctives simples	35
3.2.1 Amélioration de la précision	35
a) Correcteur à action intégrale	35
b) Conséquence sur les autres performances.....	35
3.2.2 Compensation de la perte de stabilité par placement des pôles	37
3.2.3 Action dérivée	38
3.3 Synthèse d'un correcteur numérique par discrétisation d'un correcteur continu	41
3.3.1 Principe	41
3.3.2 Exemple	42
a) Synthèse du correcteur en temps continu	42
b) Calcul du correcteur numérique équivalent	42
c) Validation des résultats	43
3.4 Synthèse d'un correcteur numérique par méthode polynomiale	44
3.4.1 Principe	44
3.4.2 Exemple	46

CHAPITRE IV

Représentation d'état des systèmes à temps discret

4.1 Principe général	47
4.1.1 Variables d'état en temps discret	47
4.1.2 Modélisation du fonctionnement du système	48
4.2 Résolution des équations d'état	49
4.2.1 Résolution des équations d'état par discrétisation d'une solution continue	49
4.2.2 Prédiction de l'état du système à un instant quelconque	50
4.2.3 Exemple	50
4.3 Commandabilité d'un système à temps discret	51
4.3.1 Accessibilité	51
4.3.2 Critère de commandabilité	51
4.4 Observabilité de l'état d'un système	51
4.4.1 Définition	51
4.4.2 Critère d'observabilité	52
4.4.3 Exemple	52
4.5 Relation entre la représentation d'état et la fonction de transfert d'un système....	
4.5.1 Représentation d'état à partir de la fonction de transfert	52
a) Représentation modale	53
b) Représentation série	54
c) Représentation compagne commandable	54
d) Représentation compagne observable	55
4.5.2 Calcul de la fonction de transfert à partir de la représentation d'état	56
a) Transformée en z des équations d'état	56
4.6 Commande échantillonnée d'un système à temps continu	56
4.6.1 Comportement du système	57
4.6.2 Influence de la période d'échantillonnage sur l'observabilité et la commandabilité d'un système discret	58
Annexe	59
Bibliographie	63

Chapitre 1

Modélisation des signaux et des systèmes échantillonnés

1.1 INTRODUCTION

Dans la réalité industrielle, la complexité des systèmes, ainsi que celle des traitements à réaliser, nécessite souvent le recours à des outils numériques de traitement : ordinateurs, calculateurs, systèmes numériques en tout genre. De tels outils ne peuvent en aucun cas s'accommoder de signaux continus ; ceux-ci doivent être transformés en suites de nombres pour pouvoir être traités. De même, ces systèmes délivrent, à leur sortie, des suites de valeurs numériques, autrement dit, des signaux numériques.

Pour transformer un signal continu en une suite de nombres compatibles avec un système de traitement numérique, on a recours à deux opérations successives : l'échantillonnage qui consiste à prélever, à intervalles de temps réguliers, des valeurs discrètes du signal, puis, la conversion analogique numérique qui transforme ces échantillons en nombres, généralement codés sous forme binaire (Figure 1.1).

L'échantillonnage réalise donc une discrétisation dans le temps, tandis que la conversion analogique-numérique réalise une discrétisation en amplitude.

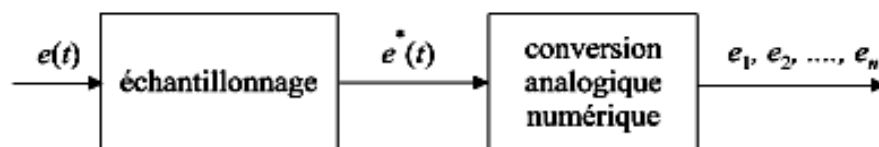


Figure.1.1 : Échantillonnage et conversion analogique numérique d'un signal.

1.2 PRINCIPES FONDAMENTAUX DE L'ÉCHANTILLONNAGE DES SIGNAUX

1.2.1 Peigne de Dirac

L'échantillonnage d'un signal temporel $s(t)$ consiste à transformer celui-ci en une suite discrète $s(nT_e)$ de valeurs prises à des instants nT_e . T_e est appelée période d'échantillonnage. Les instants nT_e sont appelés les instants d'échantillonnages. Pratiquement, échantillonner un signal revient à le multiplier par une fonction d'échantillonnage $p(t)$, nulle partout, sauf au voisinage des instants nT_e . Cette fonction, qui porte souvent le nom de peigne de Dirac, est représentée sur la Figure 1.2.

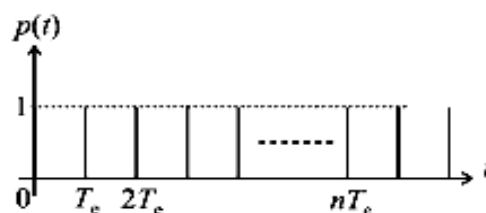


Figure.1.2 : Fonction d'échantillonnage.

Le résultat d'une opération d'échantillonnage, est représenté sur la Figure 1.3:

$$s^*(t) = p(t)s(t)$$

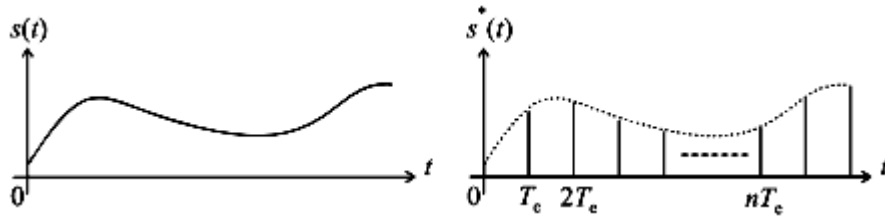


Figure.1.3 : Échantillonnage d'un signal quelconque.

L'échantillonnage d'un signal temporel $s(t)$ consiste donc à transformer celui-ci en une suite discrète $s_k = s(k)$ de valeurs prises à des instants kT_e . Ici k et n sont des entiers naturels ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) et T_e est appelée période d'échantillonnage :

Soit la suite : $s(0), s(T_e), s(2T_e), \dots, s(nT_e)$

Que l'on note en générale : $S^*(t) = \{S_0, S_1, S_2, \dots, S_n\}$

Ou encore : $s(k) = \{S_0, S_1, S_2, \dots, S_n\}$

1.2.2 Théorème de Shannon

Un des objectifs essentiels de l'échantillonnage consiste à ne pas perdre d'information lors de la discrétisation dans le temps, ce qui peut se traduire par le fait qu'il doit être possible, à partir du spectre du signal échantillonné, de reconstituer simplement celui du signal original. Un simple coup d'œil au spectre $|S^*(f)|$ nous montre que cela est possible s'il n'existe aucun recouvrement entre les différents segments de spectre (Figure.1.4).

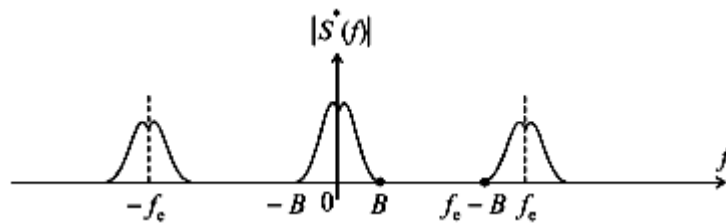


Figure.1.4 : Spectre d'un signal échantillonné.

Si $2B$ est la largeur spectrale du signal $s(t)$, autrement dit sa limite fréquentielle supérieure, le premier segment décalé, dans le spectre de $s^*(t)$, qui se trouve centré sur la fréquence f_e , s'étend de $f_e - B$ à $f_e + B$. La condition de non recouvrement est donc, de toute évidence :

$$B < f_e - B$$

$$\text{Soit : } f_e > 2B$$

Cela constitue le **théorème de Shannon** qui peut également s'énoncer de la manière suivante :

Pour préserver, lors de son échantillonnage, l'information contenue dans un signal, la fréquence d'échantillonnage f_e doit être supérieure au double de la largeur spectrale du signal.

1.3 EXEMPLES DE SIGNAUX ÉCHANTILLONNÉS SIMPLES

1.3.1 Impulsion unité

On définit l'impulsion unité échantillonnée par le signal :

$$\delta^*(t) = \{1, 0, 0, \dots, 0\}$$

Autrement dit :

$$\begin{cases} \delta^*(nT_e) = 1 & \text{pour } n = 0 \\ \delta^*(nT_e) = 0 & \text{pour } n \neq 0 \text{ et } n \rightarrow \infty \end{cases}$$

La Figure 1.5 propose une représentation schématique de cette impulsion unité.

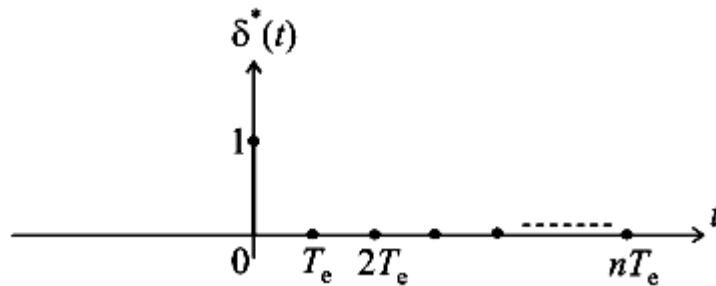


Figure.1.5 : Impulsion unité.

1.3.2 Echelon unité

On définit l'échelon unité échantillonné par le signal :

$$u^*(t) = \{1, 1, 1, \dots, 1\}$$

Autrement dit :

$$\begin{cases} u(k) = 1 & \forall k \geq 0 \\ u(k) = 0 & \forall k < 0 \end{cases}$$

La Figure 1.6 propose une représentation schématique de cet échelon unité.

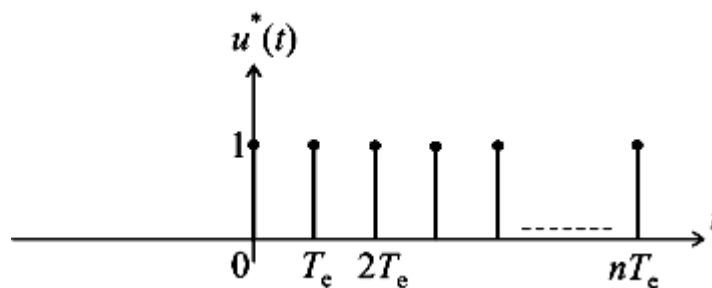


Figure.1.6 : Echelon unité.

Cet échelon unité n'est rien d'autre que la somme d'impulsions unités décalées dans le temps :

$$u^*(t) = \delta^*(t) + \delta^*(t - T_e) + \delta^*(t - 2T_e) + \dots$$

Soit :

$$u^*(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta^*(t - kT_e)$$

On pose parfois :

$$\delta^*(t - kT_e) = \delta_k$$

Ce qui nous conduit à la notation : $u^*(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta_k$

1.4 TRANSFORMÉE EN Z DES SIGNAUX ÉCHANTILLONNÉS

1.4.1 Définition

Soit $s(t)$ un signal continu quelconque que l'on échantillonne à une fréquence f_e (soit une période T_e), en respectant, bien évidemment, le théorème de Shannon.

On a : $s^*(t) = \{s_0, s_1, s_2, \dots, s_n\}$

Ou encore : $s(k) = \{s_0, s_1, s_2, \dots, s_n\}$

Cette suite n'est rien d'autre que la somme d'impulsions unités décalées dans le temps et multipliées, chacune, par le coefficient s_k :

$$s^*(t) = s_0 \delta^*(t) + s_1 \delta^*(t - T_e) + s_2 \delta^*(t - 2T_e) + \dots$$

$$s^*(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} s_k \delta^*(t - kT_e)$$

$$s^*(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} s_k \delta_k$$

Nous pouvons toujours calculer la transformée de Laplace de $s^*(t)$:

$$S^*(p) = \sum_{k=0}^{+\infty} s_k \Delta_k^*(p)$$

Dans cette expression, $\Delta_k^*(p)$ représente la transformée de Laplace d'une impulsion unité à l'instant kT_e , représentée sur la Figure 1.7.

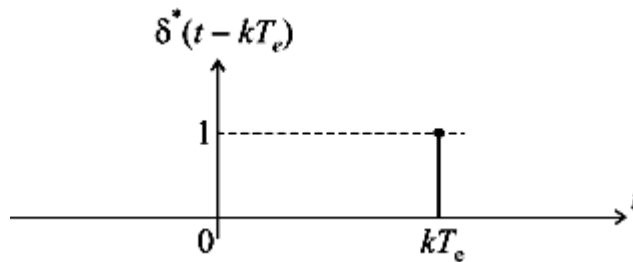


Figure.1.7 : Impulsion unité à l'instant k .

Par définition : $\Delta_k^*(p) = \int_0^{+\infty} \delta_k^*(t) e^{-pt} dt$

En appliquant le théorème du retard et en nommant $\Delta_k^*(p)$ la transformée de Laplace de l'impulsion unité :

$$\Delta_k^*(p) = \Delta_0^*(p) e^{-pkT_e}$$

Avec :

$$\Delta_0^*(p) = \int_0^{+\infty} \delta_0^*(t) e^{-pt} dt$$

De la même manière (en appliquant le théorème du retard pour $\Delta_0^*(p)$) :

$$\Delta_0^*(p) = \int_0^{+\infty} \delta_0^*(t) e^{-pt} dt = 1 \quad \text{car : } \delta^*(t) = \{1, 0, 0, \dots, 0\}$$

Il vient alors :

$$\Delta_k^*(p) = e^{-pkT_e}$$

D'où :

$$S^*(p) = \sum_{k=0}^{+\infty} s_k e^{-pkT_e}$$

En posant $z = e^{pT_e}$, on définit la transformée en z du signal $s(t)$ par :

$$S(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} s_k z^{-k}$$

La transformation en z peut être notée : $s(t) \rightarrow Z[s(t)]$

La transformée en z d'un signal n'existe, bien évidemment, que si la somme qui la définit converge. On peut montrer que ce domaine de convergence est de la forme $|z| > r$ avec $r \in \mathbb{R}$. Par la suite, nous ne nous intéresserons qu'à des signaux pour lesquels on peut effectivement définir une transformée en z .

1.4.2 Propriétés de la transformée en z

a) Linéarité

Soit $s_1(t)$ et $s_2(t)$, respectivement deux signaux quelconques possédant chacun une transformée en z , $S_1(z)$ et $S_2(z)$. La transformée en z d'une combinaison linéaire $\lambda s_1(t) + \mu s_2(t)$ de ces deux fonctions est égale à $\lambda S_1(z) + \mu S_2(z)$.

b) Théorème du retard

Soit $s(t)$ un signal quelconque possédant une transformée en z , $S(z)$ et soit $x(t) = s(t - aT_e)$ correspondant au même signal retardé d'un temps aT_e .

La transformée en z de $s(t - aT_e)$ est égale à : $X(z) = z^{-a} S(z)$

c) Théorème de la valeur finale

Soit $s(t)$ un signal quelconque possédant une transformée en z , $S(z)$. Soit s_k la suite échantillonnée correspondant au signal $s(t)$. Le théorème de la valeur finale permet de connaître la valeur vers laquelle tend la suite s_k lorsque $k \rightarrow +\infty$, autrement dit lorsque $t \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} s_k = \lim_{z \rightarrow 1} \left[(1 - z^{-1}) S(z) \right]$$

d) Multiplication par le temps

Soit $s(t)$ un signal quelconque possédant une transformée en z , $S(z)$. Soit $x(t)$ le signal défini par $x(t) = t \cdot s(t)$. Alors :

$$X(z) = -zT_e \frac{dS(z)}{dz}$$

e) Changement d'échelle

Soit $s(t)$ un signal quelconque possédant une transformée en z , $S(z)$. Soit s_k la suite échantillonnée correspondant au signal $s(t)$. Soit x_k la suite d'échantillons définie par :

$$x_k = a^k s_k \quad \text{avec} \quad a \neq 0$$

Le signal $x(t)$ correspondant à la suite x_k possède une transformée en z telle que :

$$X(z) = S\left(\frac{z}{a}\right)$$

1.5 FONCTION DE TRANSFERT EN Z

1.5.1 Relations entre échantillons de sortie et échantillons d'entrée : équation récurrente

La modélisation initiale d'un système à temps discret conduit souvent à l'écriture d'une équation récurrente entre différents termes des séquences d'entrée et de sortie. La forme générale d'une équation récurrente linéaire peut être donnée par :

$$a_n s(k+n) + a_{n-1} s(k+n-1) + \dots + a_1 s(k+1) + a_0 s(k) = b_m e(k+m) + b_{m-1} e(k+m-1) + \dots + b_1 e(k+1) + b_0 e(k)$$

Par hypothèse $a_n \neq 0$ et n est appelé l'ordre du système. Le système est dit *causal* si les sorties dépendent uniquement des événements passés. Pour cela il doit obligatoirement vérifier $m \leq n$. Cette formulation de l'équation récurrente est bien adaptée au calcul numérique. C'est la forme sous laquelle seront présentés les algorithmes de commande des procédés.

1.5.2 Définition de la fonction de transfert en z

De la même manière que l'on associe à un système à temps continu, une fonction de transfert, par application de la transformation de Laplace à son équation différentielle, on peut associer à un système à temps discret, une fonction de transfert en z , par application de la transformation en z à son équation récurrente. Sous l'hypothèse que les conditions « initiales » sont nulles ($s(0) = s(1) = \dots = s(n-1) = e(0) = e(1) = \dots = e(m-1) = 0$) il vient la relation suivante :

$$(a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n) S(z) = (b_0 + b_1 z + \dots + b_{m-1} z^{m-1} + b_m z^m) E(z)$$

Soit encore :

$$S(z) = \frac{N(z)}{D(z)} E(z)$$

Avec :

$$\frac{N(z)}{D(z)} = G(z) = \frac{b_0 + b_1 z + \dots + b_{m-1} z^{m-1} + b_m z^m}{a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n}$$

Qui est définie comme la **fonction de transfert** en z du système. Dans le cas général où les conditions initiales sont non nulles la représentation en z du système s'écrit plus exactement :

$$S(z) = \frac{N(z)}{D(z)} E(z) + \frac{I(z)}{D(z)}$$

Où le polynôme $I(z)$ ne dépend que des conditions initiales. Il influe sur la sortie du système sans modifier le comportement dû au signal d'entrée $U(z)$.

La factorisation du numérateur et du dénominateur conduit à la **forme pôles, zéros, gain** suivante :

$$G(z) = \frac{b_m (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_m)}{a_n (z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_n)}$$

Avec : $p_{i=1,\dots,n} : \text{p\^oles}$ $z_{j=1,\dots,m} : \text{z\^eros}$ $k = \frac{b_m}{a_n} : \text{gain}$

Par d\'efinition les **p\^oles** du syst\eme sont les racines du polyn\^ome d\'enominateur et les **z\^eros** du syst\eme sont les racines du polyn\^ome num\'erateur. Les uns et les autres sont par d\'efaut des nombres soit r\'eels soit complexes.

1.6 TRANSFORM\'EE DE FOURIER \`A TEMPS DISCRET

1.6.1 D\'efinition

Soit $s(t)$ un signal continu quelconque que l'on \'echantillonne \`a une fr\'equence f_e , en respectant, bien \'evidemment, le th\'eor\eme de Shannon. Soit $S(z)$ sa transform\'ee en z .

Rappelons que :

$$S^*(p) = \sum_{k=0}^n s_k e^{-pkT_e}$$

Et que la transform\'ee en z a \'et\'e obtenue en posant $z = e^{pT_e}$:

$$S(z) = \sum_{k=0}^n s_k z^{-k}$$

Exactement comme nous pouvons calculer la transform\'ee de Fourier d'un signal \`a temps continu en posant $p = j\omega$, nous pouvons tout autant poser $e^{pT_e} = e^{j\omega T_e}$ \`a condition, bien s\^ur, que la somme, ainsi transform\'ee, converge vers une valeur finie, ce que nous supposons. On obtient alors :

$$S^*(j\omega) = \sum_{k=0}^n s_k e^{-j\omega k T_e}$$

Ou encore :

$$\sigma(f) = \sum_{k=0}^n s_k e^{-j2\pi k f / f_e}$$

La fonction $\sigma(f)$ est appel\'ee transform\'ee de Fourier \`a temps discret du signal s_k . Son module repr\'esente, bien s\^ur, le spectre du signal \'echantillonn\'e.

1.6.2 Exemple

Soit $s(t)$ le signal d\'efini par $s(t) = e^{-t}$ pour $t \geq 0$. La transform\'ee en z de ce signal, \'echantillonn\'e \`a la fr\'equence f_e a pour expression :

$$S(z) = \frac{z}{z - e^{-T_e}}$$

Posons :

$$z = e^{j\omega T_e}$$

On obtient :

$$\sigma(f) = \frac{e^{j\omega T_e}}{e^{j\omega T_e} - e^{-T_e}}$$

Calculons \`a pr\'esent le spectre du signal :

$$|\sigma(f)| = \left| \frac{e^{j\omega T_e}}{e^{j\omega T_e} - e^{-T_e}} \right| = \frac{1}{|(\cos \omega T_e - \cos T_e) + j(\sin \omega T_e + \sin T_e)|}$$

$$\begin{aligned}
|\sigma(f)| &= \frac{1}{\sqrt{(\cos \omega T_e - \cos T_e)^2 + (\sin \omega T_e + \sin T_e)^2}} \\
|\sigma(f)| &= \frac{1}{\sqrt{2 - 2\cos \omega T_e \cos T_e + 2\sin \omega T_e \sin T_e}} \\
|\sigma(f)| &= \frac{1}{\sqrt{2 - 2\cos(\omega+1)T_e}} = \frac{1}{\sqrt{2 - \left(2\sin^2 \frac{(\omega+1)T_e}{2}\right)}} \\
|\sigma(f)| &= \frac{1}{2 \left| \sin \frac{(\omega+1)T_e}{2} \right|} = \frac{1}{2 \left| \sin \frac{(2\pi f+1)}{2f_e} \right|}
\end{aligned}$$

Nous pouvons tracer ce spectre, en prenant soin de se souvenir que le signal a obligatoirement été échantillonné en respectant le théorème de Shannon, autrement dit en considérant que le signal original possède une largeur spectrale $B < f_e/2$.

On tracera donc ce spectre pour $0 \leq f \leq f_e/2$

Comme :

$$\frac{1}{2f_e} \leq \frac{(2\pi f+1)}{2f_e} \leq \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2f_e}$$

On a :

$$|\sigma(f)| = \frac{1}{2 \sin \frac{(2\pi f+1)}{2f_e}}$$

Si f_e est suffisamment grande, il s'agit d'un spectre qui décroît de $\sigma_{\max} = \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2f_e}} \approx f_e$ jusqu'à

environ de $1/2$ (Figure 1.8).

En réalité, le spectre possède un minimum pour $\frac{(2\pi f+1)}{2f_e} = \frac{\pi}{2}$, autrement dit pour une fréquence déjà très élevée et voisine de $f_e/2$.

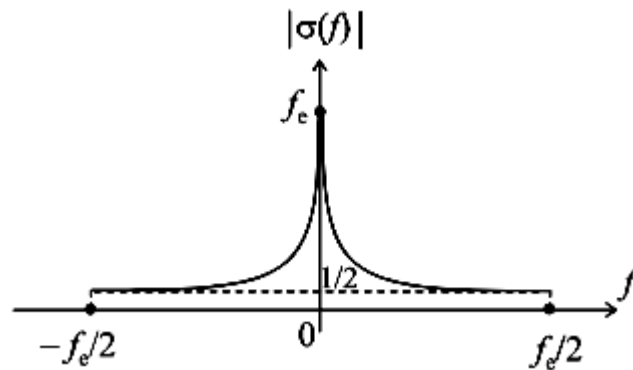


Figure.1.8 : Spectre du signal.

1.7 COMPORTEMENT FRÉQUENTIEL DES SYSTÈMES ECHANTILLONNÉS

1.7.1 Principes généraux

Considérons un système de fonction de transfert en z égale à $G(z)$ sollicité par un signal d'entrée possédant une transformée en z , $E(z)$ et délivrant un signal de sortie de transformée en z , $S(z)$ (Figure 1.9).

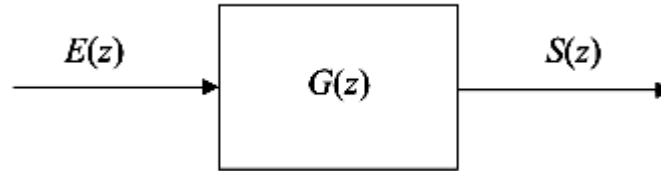


Figure.1.9 : Schéma général d'un système échantillonné.

Le système est régi par l'équation : $S(z) = G(z) E(z)$

En posant $z = e^{j\omega T_e}$, on obtient $S(e^{j\omega T_e}) = G(e^{j\omega T_e}) E(e^{j\omega T_e})$

Les termes $E(e^{j\omega T_e})$ et $S(e^{j\omega T_e})$ représentent respectivement les transformées de Fourier des signaux à temps discret d'entrée et de sortie. Par conséquent, $G(e^{j\omega T_e})$ représente le comportement fréquentiel du système : il s'agit de sa fonction de transfert en fréquence.

1.7.2 Exemple

On considère un système échantillonné régi par la relation de récurrence :

$$s(k) = \frac{1}{2}(e(k) + s(k-1))$$

En appliquant la transformée en z à cette équation, on obtient :

$$S(z) = \frac{1}{2}[E(z) + z^{-1}S(z)]$$

D'où :

$$G(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{0,5}{1 - 0,5z^{-1}}$$

Soit :

$$G(\omega) = \left| \frac{0,5}{1 - 0,5e^{-j\omega T_e}} \right| = \frac{0,5}{|1 - 0,5(\cos \omega T_e - j \sin \omega T_e)|}$$

$$G(\omega) = \frac{0,5}{\sqrt{(1 - 0,5 \cos \omega T_e)^2 + 0,25 \sin^2 \omega T_e}}$$

Finalement :

$$G(\omega) = \frac{0,5}{\sqrt{1,25 - \cos \omega T_e}}$$

Ou encore :

$$G(f) = \frac{0,5}{\sqrt{1,25 - \cos 2\pi f T_e}} = \frac{0,5}{\sqrt{1,25 - \cos 2\pi \frac{f}{f_e}}}$$

Il convient de tracer cette fonction pour f variant de 0 à $f_e/2$. Sur cet intervalle, $\cos 2\pi f T_e$ décroît de 1 à -1. $G(f)$ est donc une fonction strictement décroissante.

On a :
$$G_{\max} = G(0) = \frac{0,5}{\sqrt{0,25}} = 1$$

Et :
$$G_{\min} = G\left(\frac{f_e}{2}\right) = \frac{0,5}{\sqrt{1,25 - \cos \pi}} = \frac{0,5}{\sqrt{2,25}} = \frac{1}{3}$$

La Figure 1.10 représente le diagramme de gain fréquentiel du système.

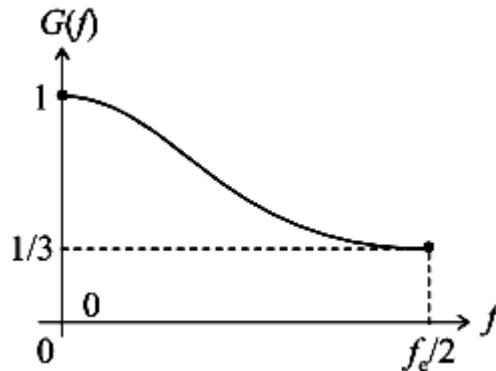


Figure.1.10 : Diagramme de gain du système.

Remarque : A contrario des systèmes à temps continus, l'usage, pour les systèmes échantillonnés, consiste à tracer la courbe de gain directement en coordonnées cartésiennes linéaires.

1.8 RELATIONS ENTRE LES MODÈLES À TEMPS CONTINU ET À TEMPS DISCRET

1.8.1 Problématique

Considérons un système à temps continu modélisé par sa fonction de transfert $G(p)$ (Figure 1.11). Nous possédons une bonne connaissance de ce type de modèles et il est tout à fait légitime de s'interroger sur l'existence d'un système échantillonné possédant les mêmes caractéristiques, c'est-à-dire le même comportement temporel et le même comportement fréquentiel.

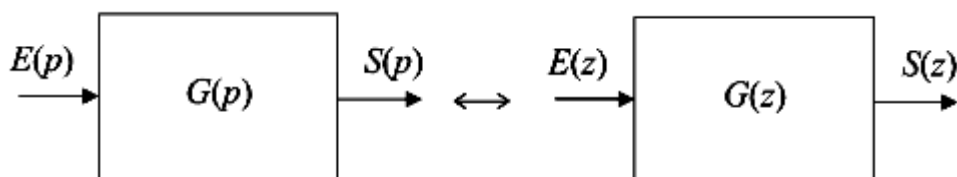


Figure.1.11 : Recherche d'une équivalence temps continu – temps discret.

Le système échantillonné $G(z)$ sera réputé équivalent au système $G(p)$ si, soumis à un signal d'entrée $E(z)$ correspondant à l'échantillonnage du signal continu $e(t)$ représenté par $E(p)$, il délivre à sa sortie un signal $S(z)$ correspondant à l'échantillonnage du signal $s(t)$ qui aurait été délivré par le système $G(p)$.

1.8.2 Équivalence à la dérivation

a) Définition

Une fonction de transfert en temps continu est issue d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants. Cette équation est formée de dérivées successives des signaux d'entrée et de sortie. Un des moyens les plus simples d'effectuer le lien entre une représentation en temps continu et en temps discret est de considérer que la variation dx/dt en temps continu correspond à la variation du signal entre deux instants d'échantillonnage :

$$\frac{dx}{dt} \approx \frac{x(k) - x(k-1)}{T_e}$$

Cette équivalence est d'autant plus vraie que la fréquence d'échantillonnage est grande. Or la transformée en z de l'expression de droite est :

$$Z\left(\frac{x(k) - x(k-1)}{T_e}\right) = \frac{1}{T_e} X(z)(1 - z^{-1})$$

De même, le terme dx/dt a pour transformée de Laplace : $pX(p)$. Par conséquent, l'équivalence naturelle entre une fonction de transfert continue en p et sa fonction de transfert échantillonnée en z est :

$$p \leftrightarrow \frac{1 - z^{-1}}{T_e}$$

Remarque : La connaissance précise de la fréquence d'échantillonnage est nécessaire pour disposer de cette équivalence.

b) Exemple

Soit un système à temps continu du premier ordre de fonction de transfert en boucle ouverte $G(p)$ définie par :

$$G(p) = \frac{K}{1 + Tp}$$

Effectuons la transformation proposée :

$$G(z) = \frac{K}{1 + T\left(\frac{1 - z^{-1}}{T_e}\right)} = \frac{K}{1 + \frac{T}{T_e} - \frac{T}{T_e} z^{-1}}$$

Comparons à présent les courbes de réponse fréquentielle de ces deux systèmes.

À titre exceptionnel, nous tracerons le gain fréquentiel du système à temps continu $G(p)$, non pas sur un diagramme de Bode, mais sur un diagramme à coordonnées cartésiennes linéaires afin de pouvoir comparer directement les deux courbes.

Pour le modèle à temps continu, on a :

$$G(\omega) = |G(\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}}$$

Traçons cette courbe en pointillés sur la Figure 1.12. Rappelons qu'une inflexion se produit à la fréquence $f = 1/2\pi T$ et notons, par ailleurs, que :

$$G(0) = K$$

$$G\left(\frac{f_e}{2}\right) = \frac{K}{\sqrt{1+4\pi^2 T^2 f_e^2}}$$

Pour le modèle à temps discret, on a :

$$G(\omega) = \frac{K}{\left|1 + \frac{T}{T_e} - \frac{T}{T_e} e^{-j\omega T_e}\right|} = \frac{K}{\sqrt{\left(1 + \frac{T}{T_e}\right)^2 + \left(\frac{T}{T_e}\right)^2 - \frac{2T}{T_e} \left(1 + \frac{T}{T_e}\right) \cos \omega T_e}}$$

Notons que :

$$G\left(\frac{f_e}{2}\right) = \frac{K}{\sqrt{\left(1 + \frac{2T}{T_e}\right)^2}} = \frac{K}{1 + \frac{2T}{T_e}} = \frac{K}{1 + 2Tf_e}$$

(Cette valeur est nettement supérieure à celle fournie par le modèle à temps continu)

Et que :

$$G(0) = \frac{K}{\sqrt{\left(1 + \frac{T}{T_e}\right)^2 + \left(\frac{T}{T_e}\right)^2 - \frac{2T}{T_e} \left(1 + \frac{T}{T_e}\right)}} = K$$

(Cette valeur est identique à celle fournie par le modèle à temps continu).

Traçons (en trait plein) la courbe représentative du gain du système à temps discret sur la même figure.

La conclusion est évidente : les deux courbes coïncident aux basses fréquences mais l'équivalence proposée devient de moins en moins précise au fur et à mesure où l'on se rapproche de $f_e/2$.

Remarque : Rappelons que la courbe de réponse d'un système à temps discret n'a de sens que sur l'intervalle $\left[0, \frac{f_e}{2}\right]$

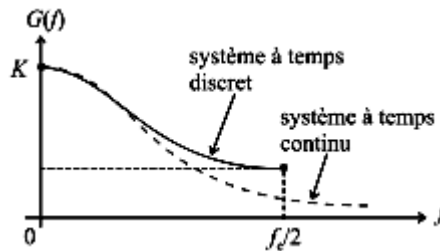


Figure.1.12 : Comparaison des deux modèles.

1.8.3 Équivalence à l'intégration

a) Définition

L'équivalence à l'intégration, appelée également transformation bilinéaire propose une correspondance plus précise que l'équivalence à la dérivation. Nous mentionnons ici cette

équivalence sans la justifier :

$$p \leftrightarrow \frac{2(1 - z^{-1})}{T_e(1 + z^{-1})}$$

b) Exemple

Reprenons notre système à temps continu du premier ordre de fonction de transfert en boucle ouverte $G(p)$ définie par :

$$G(p) = \frac{K}{1+Tp}$$

Effectuons la transformation proposée :

$$G(z) = \frac{K}{1+T \left(\frac{2(1-z^{-1})}{T_e(1+z^{-1})} \right)} = \frac{K(1+z^{-1})}{(1+z^{-1}) + \frac{2T}{T_e}(1-z^{-1})}$$

Soit :

$$G(z) = \frac{K(1+z^{-1})}{(1+z^{-1}) + \frac{2T}{T_e}(1-z^{-1})} = \frac{K(1+z^{-1})}{1 + \frac{2T}{T_e} + \left(1 - \frac{2T}{T_e}\right)z^{-1}}$$

Remarque : La connaissance précise de la fréquence d'échantillonnage est toujours nécessaire pour disposer de cette équivalence.

1.8.4 Équivalence modale

Dans l'esprit de conformité entre les réponses impulsionnelles en temps continu et en temps discret, on peut proposer une approche modale de l'équivalence entre fonction de transfert en temps continu et en temps discret. Cette équivalence est basée sur la concordance des pôles entre les deux fonctions. On utilise alors la transformation :

$$p - p_i \leftrightarrow z - e^{p_i T_e}$$

Toutefois, ce type d'équivalence possède l'inconvénient de ne traiter que des pôles des fonctions. Il est souvent nécessaire d'ajuster leurs numérateurs en fonction de critères particuliers. Les expressions fournies en annexe B correspondent à des fonctions de transfert que l'on a systématiquement adaptées pour que leurs gains statiques concordent.

Ainsi :

$$G(p) = \frac{1}{p - p_i} \leftrightarrow G(z) = \left(-\frac{1}{p_i} \right) \frac{1 - e^{p_i T_e}}{z - e^{p_i T_e}}$$

De sorte que :

$$G(0) = \frac{1}{0 - p_i} \leftrightarrow G(1) = -\left(\frac{1}{p_i} \right) \frac{1 - e^{p_i T_e}}{1 - e^{p_i T_e}}$$

1.8.5 Équivalence d'une association de plusieurs systèmes

On ne peut déterminer l'équivalent $G(z)$ d'un système de fonction de transfert en temps continu $G(p)$ que si ses signaux d'entrée et de sortie sont échantillonnés (Figure 1.13).

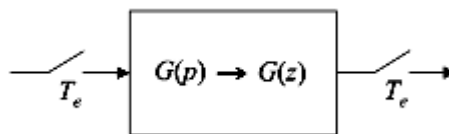


Figure.1.13 : Principe de l'équivalence Laplace – Z.

Par conséquent, il est impossible, lorsque deux systèmes sont associés en cascade (Figure.1.14) de calculer l'équivalent de la fonction de transfert globale $G_0(p) = G_1(p)G_2(p)$ par la multiplication pure et simple de $G_1(z)G_2(z)$. En effet, en cherchant l'équivalent $G_0(z)$ de $G_0(p)$, on suppose implicitement que seuls les signaux d'entrée et de sortie de G_0 sont échantillonnés. Et lorsque l'on écrit $G_1(z)G_2(z)$, on suppose que le signal sortant de G_1 et entrant dans G_2 est lui aussi échantillonné, sinon, on ne pourrait trouver ces deux équivalents.

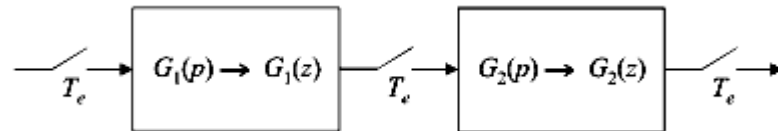


Figure.1.14 : Principe de l'équivalence Laplace – Z pour une association en cascade.

En conclusion, on ne peut pas déterminer l'équivalent en z d'une association de plusieurs systèmes en multipliant les deux fonctions de transfert en temps continu, puis en cherchant l'équivalent de la fonction globale ; il faut impérativement calculer d'abord les fonctions de transfert en z de chaque système, puis multiplier ces fonctions de transfert en z pour obtenir la fonction de transfert échantillonnée de l'ensemble.

Chapitre 2

Stabilité et performances des systèmes échantillonnés asservis

2.1 MISE EN ÉQUATION DES ASSERVISSEMENTS ÉCHANTILLONNÉS

2.1.1 Fonction de transfert en boucle fermée

Tout comme les systèmes continus, les systèmes échantillonnés peuvent être asservis selon le même principe de la boucle fermée (Figure 2.1).

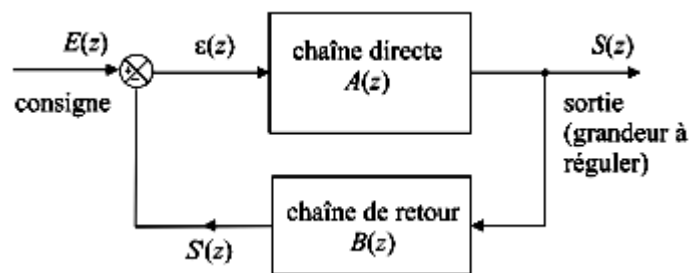


Figure.2.1 : Schéma général d'un système échantillonné asservi.

La chaîne directe et la chaîne de retour sont modélisées par leurs fonctions de transfert en z et les signaux d'entrée et de sortie sont bien évidemment échantillonnés à une fréquence f_e et possèdent chacun une transformée en z : $E(z)$ et $S(z)$. L'écart $\varepsilon(t)$ n'échappe pas à la règle. Soit $\varepsilon(z)$ sa transformée en z .

Tout comme dans le cas des systèmes à temps continu, on définit les fonctions de transfert en boucle ouverte $G(z)$ et en boucle fermée $H(z)$ par :

$$G(z) = A(z)B(z)$$

Et :

$$H(z) = \frac{A(z)}{1 + A(z)B(z)}$$

Dans le cas d'une boucle à retour unitaire, on a $B(z) = 1$ et, par conséquent :

$$G(z) = A(z)$$

Soit :

$$H(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)}$$

2.1.2 Relation temps continu – temps discret en boucle fermée

Considérons un système à temps continu asservi, selon le schéma général de la Figure 2.2.

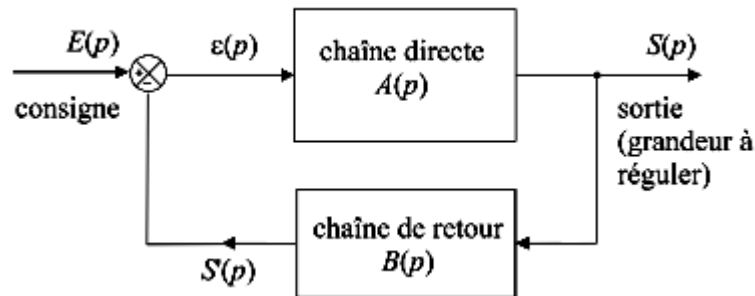


Figure.2.2 : Schéma général d'un système à temps continu asservi

Chacun des sous-systèmes constitutifs $A(p)$ et $B(p)$ possède un équivalent en temps discret $A(z)$ et $B(z)$, comme cela a été étudié au chapitre précédent. Ces équivalents supposent que chacun de ces sous-systèmes possèdent une entrée et une sortie échantillonnées (Figure 2.3).

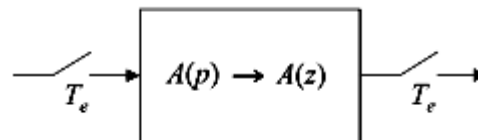


Figure.2.3 : Conditions d'équivalence Laplace – Z

Si on se contentait, dans le schéma de la Figure 2.2, d'échantillonner uniquement le signal de consigne et le signal de sortie, on obtiendrait le schéma de la figure 2.4, mais, dans cette configuration, le système obtenu serait complètement différent de celui auquel on s'attend et qui est représenté sur la figure 2.5. En effet, il n'est pas possible de déterminer l'équivalent $A(z)$ de $A(p)$ si son signal d'entrée n'est pas échantillonné. Il est donc nécessaire de disposer d'un modèle dans lequel chaque signal est échantillonné.

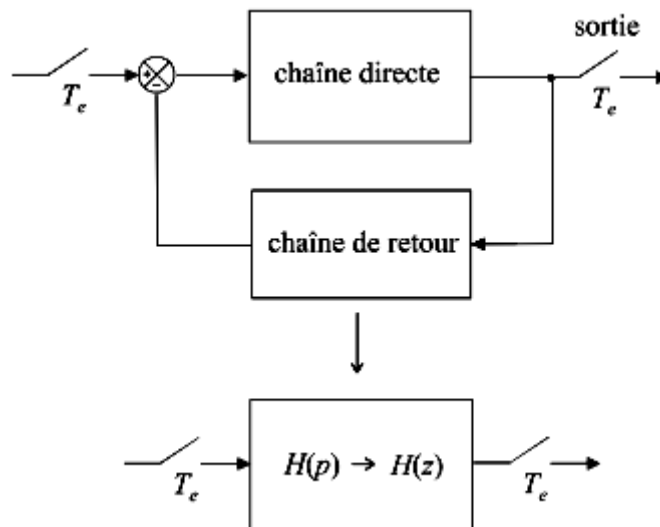


Figure.2.4 : Échantillonnage de la consigne et de la sortie

La principale conséquence de cette constatation est le mode de calcul de la fonction de transfert en boucle fermée d'un système asservi à temps discret lorsque celui-ci est déterminé à partir d'un modèle à temps continu : il n'est pas possible de déterminer la fonction de transfert en z en boucle fermée à partir de l'équivalence de la fonction de transfert en boucle fermée en temps continu $H(p)$. Il faut déterminer indépendamment les fonctions de transfert en z de chaque sous-système (figure 2.5) et calculer la fonction de transfert en boucle fermée $H(z)$ à partir de l'expression :

$$H(z) = \frac{A(z)}{1 + A(z)B(z)}$$

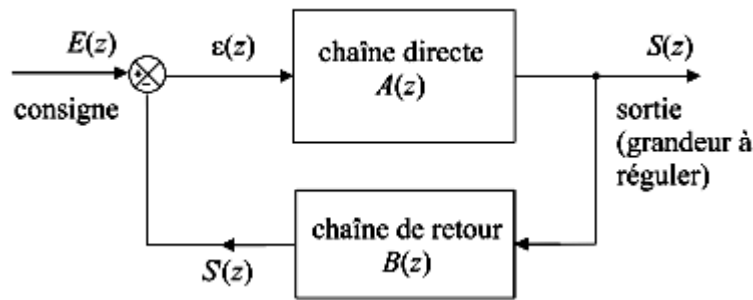


Figure.2.5 : Schéma de l'asservissement échantillonné attendu

2.2 STABILITÉ DES ASSERVISSEMENTS ÉCHANTILLONNÉS

2.2.1 Critère mathématique de stabilité

a) Énoncé du critère

Pour les systèmes à temps discret, la définition de la stabilité reste la même : à une entrée finie doit correspondre une sortie finie. Considérons un système échantillonné défini par la fonction de transfert suivante :

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_p z^{-p}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_q z^{-q}} = \frac{a_0 \prod_{i=1}^p (1 - z_i z^{-1})}{\prod_{j=1}^q (1 - p_j z^{-1})}$$

Les z_i et les p_j sont respectivement les zéros et les pôles de la fonction de transfert.

Plaçons un échelon unité à l'entrée de ce système, soit : $E(z) = \frac{z}{z-1}$

On a alors :

$$S(z) = H(z)E(z) = \frac{a_0 \prod_{i=1}^p (1 - z_i z^{-1})}{\prod_{j=1}^q (1 - p_j z^{-1})} \cdot \frac{z}{z-1}$$

D'après le théorème de la valeur finale, on a :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} s(k) = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{z-1}{z} S(z) \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{a_0 \prod_{i=1}^p (1 - z_i z^{-1})}{\prod_{j=1}^q (1 - p_j z^{-1})} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} H(z)$$

Or le système sera stable si et seulement si $s(k)$ tend vers une valeur finie.

La fonction de transfert peut naturellement être décomposée en éléments simples :

$$H(z) = \sum \frac{\alpha_j}{\left(1 - \frac{p_j}{z}\right)}$$

Et il faudra qu'aucun de ces termes ne tende vers l'infini lorsque $z \rightarrow 1$ pour assurer la stabilité du système. On sait par ailleurs que le domaine de convergence (donc d'existence) de la transformée en z est tel que $|z| > r$. Pour faire tendre z vers 1, il faut bien évidemment que le seuil de convergence r soit inférieur à 1. Le seul moyen de garantir qu'aucun terme de la décomposition en éléments simples ne diverge lorsque z tend vers 1 est donc de n'avoir que des pôles p_j dont le module sera strictement inférieur à 1.

Généralisons donc ce résultat :

Un système échantillonné est stable si et seulement si tous les pôles p_j de sa fonction de transfert sont tels que $|p_j| < 1$. On traduit souvent cette propriété par la proposition suivante qui concerne la position des pôles dans le plan complexe :

Un système est stable si et seulement si les pôles de sa fonction de transfert se trouvent tous à l'intérieur du cercle de rayon 1.

b) Exemple : stabilité en boucle fermée d'un système du premier ordre

On considère un système échantillonné de fonction de transfert en boucle ouverte $G(z)$ placé dans une boucle à retour unitaire (Figure 2.6), avec :

$$G(z) = \frac{b}{1 - az^{-1}} = \frac{bz}{z - a}$$

Les paramètres b et a sont positifs. De plus, on supposera que $a < 1$.

Ce système correspond, en boucle ouverte, à l'équation de récurrence suivante :

$$s(k) = be(k) + as(k-1)$$

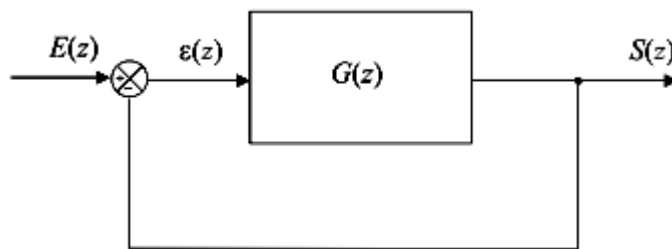


Figure.2.6 : Schéma d'un asservissement échantillonné à retour unitaire

Étudions sa stabilité en boucle fermée :

$$H(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)} = \frac{\frac{bz}{z-a}}{1 + \frac{bz}{z-a}} = \frac{bz}{(b+1)z - a}$$

Le système est stable en boucle fermée si l'unique pôle de cette fonction de transfert est inférieur à 1 :

$$\frac{a}{b+1} < 1$$

2.2.2 Critère algébrique de Jury

Pour les systèmes échantillonnés d'ordre élevé ou possédant des paramètres variables, on peut montrer qu'il est impossible d'utiliser le critère mathématique, et c'est pour cela qu'un critère algébrique, dit de Jury, avait été introduit. Le critère de Jury permet de diagnostiquer la stabilité d'un système sans avoir à calculer ses pôles. Il ressemble beaucoup au critère de Routh et est aussi simple à utiliser.

a) Énoncé du critère

Soit $H(z)$ la fonction de transfert en boucle fermée d'un système échantillonné asservi :

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_p z^{-p}}{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_q z^{-q}}$$

En multipliant le dénominateur de cette fonction de transfert par z^q , on obtient :

$$H(z) = \frac{z^q (a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_p z^{-p})}{b_0 z^q + b_1 z^{q-1} + b_2 z^{q-2} + \dots + b_q} = \frac{N(z)}{D(z)}$$

Remarque : Il faut s'arranger pour que b_0 soit positif.

À partir de l'expression $D(z)$ du dénominateur de $H(z)$, ainsi placé sous la forme d'un polynôme en z , on construit un tableau similaire à celui du critère de Routh, de la manière suivante :

On place toute la suite de coefficients b_j dans un tableau, sur une première ligne, dans l'ordre des puissances de z décroissantes, puis, sur une deuxième ligne, on place les mêmes coefficients mais en sens inverse. On effectue ensuite un calcul pour créer une ligne supplémentaire de $q - 1$ valeurs c_j , avec :

$$c_j = b_0 b_j - b_q b_{q-j}$$

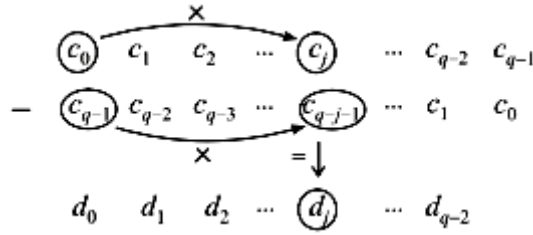
On dispose alors d'un tableau de trois lignes et on crée aussitôt une quatrième ligne avec la même suite de coefficients c_j , mais placée en sens inverse :

$$\begin{array}{ccccccc} b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_q & & \\ b_q & b_{q-1} & b_{q-2} & \dots & b_0 & & \\ c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_{q-1} & & \\ c_{q-1} & c_{q-2} & c_{q-3} & \dots & c_0 & & \end{array}$$

La cinquième ligne est calculée à partir des deux lignes précédentes et cette fois, on calcule uniquement $q - 2$ valeurs d_j selon l'expression :

$$d_j = c_0 c_j - c_{q-1} c_{q-j-1}$$

Plutôt que de retenir cette expression, il est préférable de visualiser l'opération qui est faite, sur le tableau (figure 2.7).

**Figure.2.7 : Construction de la table de Jury**

Une sixième ligne est automatiquement ajoutée au tableau en disposant les coefficients d_j en sens inverse. On itère le processus de calcul jusqu'à ce qu'il ne reste que 3 termes sur une ligne (bien noter qu'à chaque série de calculs, on crée un terme de moins qu'il n'y en a sur les deux lignes précédentes). Le tableau définitif doit comporter $2q - 3$ lignes. Le système est stable si toutes les conditions suivantes sont réunies simultanément :

$$\begin{cases} D(1) > 0 \\ D(-1) > 0 \text{ si } n \text{ est impair, } D(-1) < 0 \text{ si } n \text{ est pair} \\ b_0 > |b_q| \\ |c_0| > |c_{q-1}| \\ |d_0| > |d_{q-2}| \\ \dots \\ |x_0| > |x_2| \end{cases}$$

Remarque : Il faut donc, en plus des conditions sur $D(1)$ et $D(-1)$, que sur chaque ligne créée de rang impair, la valeur absolue du premier terme soit inférieure à celle du dernier.

b) Exemple : stabilité d'un système du second ordre

Soit $H(z)$ la fonction de transfert en boucle fermée d'un système échantillonné asservi.

Soit :

$$H(z) = \frac{1}{az^2 + bz + c} = \frac{N(z)}{D(z)}$$

Les coefficients a , b et c sont supposés strictement positifs. Comme le système est d'ordre 2, une seule ligne suffit ($2q - 3 = 1$). Le tableau se limite donc à la liste des coefficients dans l'ordre des puissances décroissantes :

$$a \quad b \quad c$$

L'analyse de la table nous conduit immédiatement à la condition : $a > c$. Par ailleurs, on doit avoir :

$$\begin{aligned} D(1) > 0 &\Rightarrow a + b + c > 0 \\ D(-1) > 0 &\Rightarrow a - b + c > 0 \end{aligned}$$

En conclusion, le système est stable si :

$$\begin{cases} a > c \\ a + b + c > 0 \\ a - b + c > 0 \end{cases}$$

2.2.3 Influence de la fréquence d'échantillonnage sur la stabilité

a) Mise en évidence

Nous allons tenter, à partir d'un exemple simple, de montrer que la stabilité d'un système échantillonné peut être grandement influencée par le choix de la période d'échantillonnage. Considérons un système de fonction de transfert en boucle ouverte $G(p)$ placé dans une boucle à retour unitaire avec :

$$G(p) = \frac{K}{1+Tp}$$

Si on se réfère à la table des équivalents Laplace – z (fournie en annexe B), le système échantillonné asservi qui possédera le même fonctionnement aura pour fonction de transfert :

$$G(z) = \frac{K \left(1 - e^{-\frac{T_e}{T}}\right)}{z - e^{-\frac{T_e}{T}}} \Rightarrow H(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)} = \frac{K \left(1 - e^{-\frac{T_e}{T}}\right)}{z - e^{-\frac{T_e}{T}} + K \left(1 - e^{-\frac{T_e}{T}}\right)}$$

Remarque : Bien noter que l'on n'a pas le droit de déduire la fonction de transfert échantillonnée en boucle fermée à partir de la fonction de transfert continue en boucle fermée.

Alors que le système en temps continu $H(p)$ est toujours stable, le système échantillonné ne l'est pas toujours. En effet, $H(z)$ possède un pôle dont le module est susceptible d'être supérieur à 1.

$$\text{Ce pôle a pour expression : } p_1 = K \left(e^{-\frac{T_e}{T}} - 1 \right) + e^{-\frac{T_e}{T}}$$

Le système échantillonné sera stable si et seulement si :

$$\left| K \left(e^{-\frac{T_e}{T}} - 1 \right) + e^{-\frac{T_e}{T}} \right| < 1$$

On peut donc avoir :

$$K \left(e^{-\frac{T_e}{T}} - 1 \right) + e^{-\frac{T_e}{T}} < 1 \Rightarrow K > -1$$

Ce qui ne nous intéresse guère,

$$\text{Ou bien : } K - (1 + K) e^{-\frac{T_e}{T}} < 1 \Rightarrow K < \frac{1 + e^{-\frac{T_e}{T}}}{1 + e^{\frac{T_e}{T}}}$$

Le système échantillonné peut donc être instable : pour une période d'échantillonnage donnée, il existe une limite supérieure du gain statique qui délimite le domaine stable. Si c'est le gain statique qui est fixé, on a :

$$K - (1 + K) e^{-\frac{T_e}{T}} < 1 \Rightarrow -(1 + K) e^{-\frac{T_e}{T}} < 1 - K$$

$$e^{-\frac{T_e}{T}} > \frac{1 - K}{1 + K} \Rightarrow -\frac{T_e}{T} > \ln \frac{1 - K}{1 + K} \Rightarrow T_e < T \ln \frac{1 - K}{1 + K}$$

La période d'échantillonnage doit donc être inférieure à une valeur qui dépend des paramètres du système. Autrement dit la fréquence d'échantillonnage doit être supérieure à un certain seuil.

Remarque : Il s'agit là d'un résultat important : en automatique, la fréquence d'échantillonnage n'est pas uniquement dictée par le théorème de Shannon (d'ailleurs il n'est pas toujours possible de connaître *a priori* les spectres des signaux dans le système) mais aussi par les caractéristiques du système.

b) Choix de la fréquence d'échantillonnage

La règle traditionnellement adoptée par les automaticiens, en matière de choix de la fréquence d'échantillonnage consiste à évaluer la bande passante f_{pas} du système asservi et de choisir une fréquence d'échantillonnage telle que :

$$6f_{pas} < f_e < 25f_{pas}$$

On rappelle que la bande passante est définie comme la limite supérieure de la plage de fréquences pour lesquelles le gain est constant à 3 dB près.

2.3 ASSERVISSEMENTS CONTINUS COMMANDÉS OU CORRIGÉS EN TEMPS DISCRET

2.3.1 Définition

Les systèmes asservis comportent assez souvent à la fois des éléments fonctionnant à temps discret et d'autres qui fonctionnent à temps continu. Parmi ces systèmes, on rencontre notamment des asservissements de systèmes continus pour lesquels on envisage une correction par ordinateur. Dans ce cas, les signaux de consignes et de sortie sont continus ; seuls les signaux entrants et sortant du correcteur sont échantillonnés (Figure 2.8).

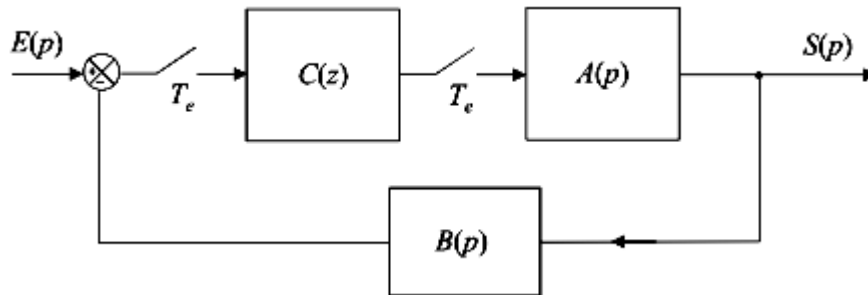


Figure.2.8 : Asservissement continu avec correction numérique

Dans d'autres cas, l'asservissement complet d'un système continu est piloté par un signal échantillonné (Figure 2.9).

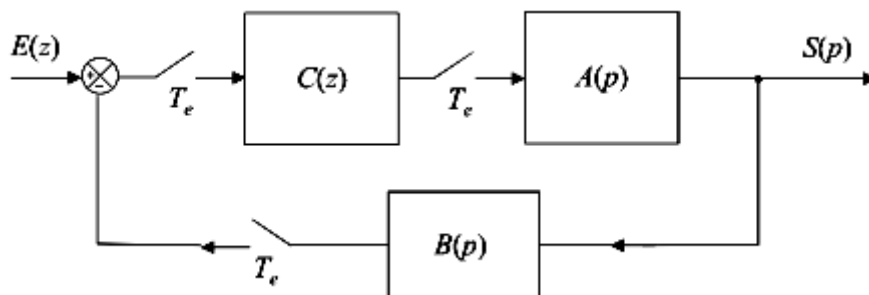


Figure.2.9 : Asservissement continu commandé par un signal échantillonné

2.3.2 Interfaçage entre un système discret et un système continu

Un problème subsiste dans les deux cas que nous venons de mentionner : la connexion d'un système échantillonné vers un système à temps continu n'est *a priori* pas possible. En effet, le signal délivré par le système $C(z)$ est un signal identique à celui présenté sur la Figure.2.10. Il s'agit même, en général, d'une suite de nombres délivrés sous forme binaire. Ce type de signal est bien sûr incompatible avec l'entrée d'un système à temps continu.

Pour retrouver un signal « admissible », il est nécessaire de reconvertir la suite numérique en impulsions discrètes, au moyen d'un convertisseur numérique analogique, puis (et c'est cela qui transforme véritablement le signal en temps discret en signal continu) de procéder à un blocage du signal grâce à un système appelé bloqueur.

Le blocage consiste à maintenir la valeur de l'échantillon jusqu'à l'arrivée de l'échantillon suivant. Le signal $x^*(t)$, après blocage, devient le signal continu représenté sur la figure 2.11.

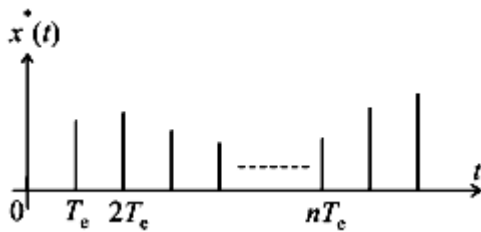


Fig. 2.10: Signal issu du correcteur

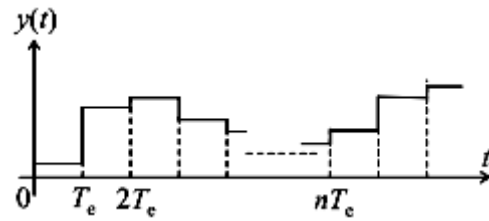


Fig. 2.11: Signal continu obtenu après blocage

On admettra qu'un bloqueur d'ordre 0 peut être modélisé par une fonction de transfert en temps continu égale à :

$$B_0(p) = \frac{1 - e^{-pT_e}}{p}$$

2.3.3 Première méthode d'étude simple : recherche d'un système continu équivalent

La première méthode d'étude du système consiste à rechercher le système continu auquel il est équivalent. Prenons l'exemple du système représenté sur la figure 2.8. Le correcteur $C(z)$ possède sans aucun doute un équivalent en temps continu, soit $C(p)$.

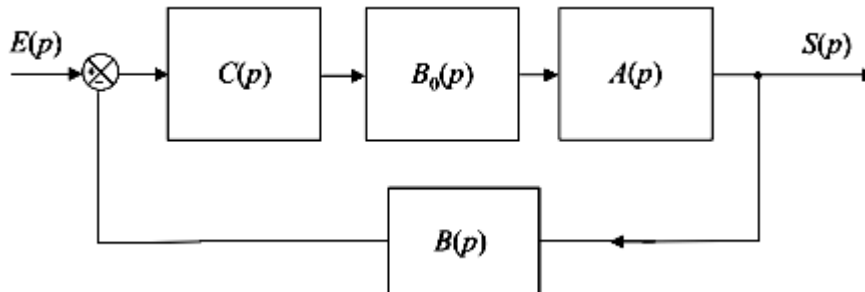


Figure.2.12 : Équivalence en temps continu du système

Nous pouvons alors proposer un schéma équivalent en continu, en veillant à ne pas oublier le bloqueur d'ordre 0 qui, dans le modèle en temps continu, effectue l'interfaçage entre le correcteur et le système à commander (figure 2.12).

2.3.4 Deuxième méthode d'étude simple : recherche d'un système discret équivalent

On peut également étudier le système en recherchant le système à temps discret auquel il est équivalent. Reprenons l'exemple du système représenté sur la figure 2.8. Soit $A(z)$ et $B(z)$ les équivalents en temps discrets des fonctions de transfert $A(p)$ et $B(p)$.

Nous pouvons immédiatement proposer le schéma équivalent en temps continu (figure 2.13), en veillant, surtout, à ne pas y inclure le bloqueur d'ordre 0 qui, dans le modèle en temps discret, n'a aucune raison d'être.

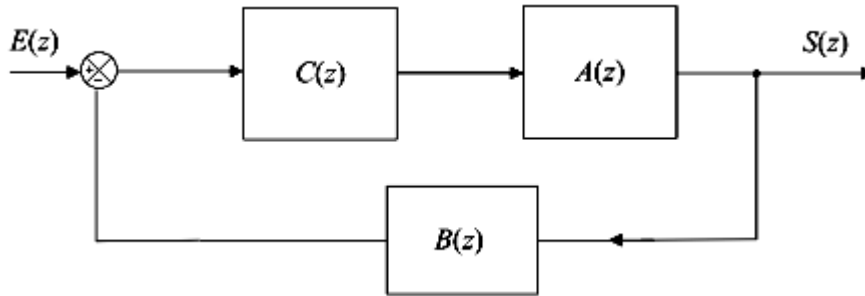


Figure.2.13 : Équivalence en temps discret du système

2.4 PRÉCISION DES ASSERVISSEMENTS ÉCHANTILLONNÉS

2.4.1 Erreurs de position et de vitesse

On définit, pour les systèmes à temps discret, les mêmes performances que pour les systèmes à temps continu. Il en est ainsi de la précision des systèmes qui est ici, toujours définie par les notions d'erreurs de position et de vitesse.

Considérons un système échantillonné asservi de fonction de transfert en boucle ouverte $G(z)$, placé dans une boucle à retour unitaire et représenté sur la figure 2.14.

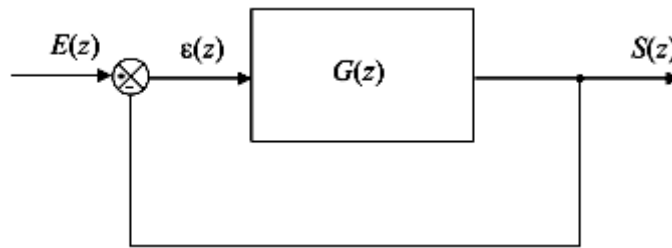


Figure.2.14 : Schéma d'un asservissement échantillonné à retour unitaire

On définit l'erreur de position ε_p par : $\varepsilon_p = \lim_{k \rightarrow +\infty} \varepsilon(k)$, pour une entrée en échelon unité

En appliquant le théorème de la valeur finale, on obtient :

$$\varepsilon_p = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\left(\frac{z-1}{z} \right) \varepsilon(z) \right]$$

Or : $\varepsilon(z) = E(z) - S(z) = E(z) - G(z)\varepsilon(z)$ d'où : $\varepsilon(z) = \frac{E(z)}{1+G(z)}$

On a donc :
$$\varepsilon_p = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\left(\frac{z-1}{z} \right) \frac{E(z)}{1+G(z)} \right]$$

Comme le signal d'entrée est un échelon unité, on a :

$$E(z) = \frac{z}{z-1} \Rightarrow \varepsilon_p = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{1}{1+G(z)} \right]$$

On définit également l'erreur de vitesse ε_v par : $\varepsilon_v = \lim_{k \rightarrow +\infty} \varepsilon(k)$ pour une entrée en rampe

On a toujours :
$$\varepsilon_p = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\left(\frac{z-1}{z} \right) \frac{E(z)}{1+G(z)} \right]$$

Avec cette fois :

$$E(z) = \frac{zT_e}{(z-1)^2} \Rightarrow \varepsilon_v = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{T_e}{(z-1)[1+G(z)]} \right]$$

2.4.2 Précision d'un système échantillonné du premier ordre

On considère un système échantillonné de fonction de transfert en boucle ouverte $G(z)$ placé dans une boucle à retour unitaire (figure 2.13), avec :

$$G(z) = \frac{b}{1-az^{-1}} = \frac{bz}{z-a} \quad \text{avec } b > 0 \quad \text{et} \quad 0 < a \leq 1$$

Nous savons déjà (paragraphe 2.2.1 – b) que le système est stable en boucle fermée si l'unique pôle de la fonction de transfert en boucle fermée est inférieur à 1.

Soit :
$$\frac{a}{b+1} < 1$$

a) Calcul de l'erreur de position

L'erreur de position de ce système asservi a pour expression :

$$\varepsilon_p = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{1}{1+G(z)} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{1}{1 + \frac{b}{1-az^{-1}}} \right]$$

Soit :
$$\varepsilon_p = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{1}{1 + \frac{bz}{z-a}} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{z-a}{(b+1)z-a} \right] = \frac{1-a}{b+1-a}$$

Remarque : Compte tenu de la condition de stabilité, le dénominateur de cette expression ne peut être nul.

Cette erreur de position est nulle, autrement dit le système est parfaitement précis en boucle fermée, si $a = 1$, donc si la fonction de transfert en boucle ouverte $G(z)$ possède un pôle égale à 1.

b) Calcul de l'erreur de vitesse

L'erreur de vitesse du système asservi a pour expression :

$$\varepsilon_v = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{T_e}{(z-1) + \left[1 + \frac{bz}{z-a} \right]} \right]$$

Soit :

$$\varepsilon_v = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{T_e(z-a)}{(z-1)[z(1+b)-a]} \right] \rightarrow \infty$$

L'erreur de vitesse d'un système du premier ordre placé dans une boucle d'asservissement est donc infini, sauf si $a = 1$, auquel cas :

$$\varepsilon_v = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{T_e(z-1)}{(z-1)[z(1+b)-1]} \right] = \frac{T_e}{b}$$

c) Généralisation

La présence d'un pôle égal à 1 dans la fonction de transfert en boucle ouverte assure donc une bonne précision statique mais n'assure pas une bonne précision dynamique. Considérons à présent un système de fonction de transfert en boucle ouverte $G(z)$ quelconque de la forme :

$$G(z) = \frac{1}{(1-z^{-1})^n} \cdot A(z)$$

Un tel système possède n pôles égaux à 1. On aussi dit que la fonction de transfert en boucle ouverte est constituée, notamment, de n intégrateurs, étant donné que la forme $\frac{1}{1-z^{-1}}$ correspond à une constante multiplicative près à l'intégration $\frac{1}{p}$.

L'erreur de position de ce système en boucle fermée a pour expression :

$$\varepsilon_p = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{1}{1+G(z)} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{1}{1 + \frac{A(z)}{(1-z^{-1})^n}} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{(z-1)^n}{(z-1)^n + z^n A(z)} \right]$$

Quelle que soit la valeur de n supérieure ou égale à 1 : $\varepsilon_p = 0$.

La présence d'au moins un intégrateur dans la fonction de transfert en boucle ouverte assure donc bien la nullité de l'erreur statique.

L'erreur de vitesse du système en boucle fermée a pour expression :

$$\varepsilon_v = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{T_e}{(z-1)[1+G(z)]} \right] = \frac{T_e}{\lim_{z \rightarrow 1} \left[(z-1) + \frac{(z-1)A(z)}{(1-z^{-1})^n} \right]}$$

Soit :

$$\varepsilon_v = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{T_e (z-1)^n}{(z-1) \left[(z-1)^n + z^n A(z) \right]} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{T_e (z-1)^{n-1}}{\left[(z-1)^n + z^n A(z) \right]} \right]$$

Si $n = 1$:

$$\varepsilon_v = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{T_e}{\left[(z-1) + z^n A(z) \right]} \right] = \frac{T_e}{A(1)} \neq 0$$

Si $n \geq 2$

$$\varepsilon_v = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{T_e (z-1)^{n-1}}{\left[(z-1)^n + z^n A(z) \right]} \right] = \frac{T_e}{A(1)} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^{n-1} = 0$$

En conclusion, la présence d'un intégrateur dans la fonction de transfert en boucle ouverte assure une erreur de vitesse finie d'autant plus faible que la période d'échantillonnage est faible. La présence d'au moins deux intégrateurs assure la nullité de l'erreur de vitesse.

2.5 PERFORMANCES DYNAMIQUES D'UN SYSTÈME ÉCHANTILLONNÉ

Tout comme l'étude des systèmes à temps continu conduit à mettre en évidence des performances en boucle fermée telles que rapidité et limitation du dépassement, nous allons à présent nous intéresser à ces performances dynamiques dans le cas des systèmes à temps discret.

2.5.1 Fonction de transfert échantillonnée équivalente à un système du second ordre

On considère un système à temps continu du second ordre, caractérisé en boucle ouverte, par une fonction de transfert $G(p)$ telle que :

$$G(p) = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi p}{\omega_n} + 1}$$

Nous nous limiterons à l'étude du cas $\xi < 1$, pour mettre en évidence les paramètres liés au temps de montée et au dépassement. Par ailleurs, nous savons déjà, que cette fonction possède dans ce cas deux pôles complexes conjugués :

$$p_1 = -\omega_n \left[\xi - j\sqrt{1-\xi^2} \right] \quad \text{et} \quad p_2 = -\omega_n \left[\xi + j\sqrt{1-\xi^2} \right]$$

Soit :

$$G(p) = \frac{K\omega_n^2}{(p-p_1)(p-p_2)} = K\omega_n^2 \cdot \frac{1}{(p-p_1)} \cdot \frac{1}{(p-p_2)}$$

Calculons à présent, à l'aide de la table d'équivalence fournie en annexe B, la fonction de transfert en z équivalente à $G(p)$:

$$G(z) = K\omega_n^2 \cdot \left[\left(-\frac{1}{p_1} \right) \frac{1-e^{p_1 T_e}}{z-e^{p_1 T_e}} \right] \cdot \left[\left(-\frac{1}{p_2} \right) \frac{1-e^{p_2 T_e}}{z-e^{p_2 T_e}} \right]$$

Comme :

$$p_1 p_2 = \omega_n^2$$

On obtient :

$$G(z) = \frac{K(1 - e^{p_1 T_e})(1 - e^{p_2 T_e})}{(z - e^{p_1 T_e})(z - e^{p_2 T_e})}$$

Notons au passage que les deux pôles de la fonction de transfert en z sont $e^{p_1 T_e}$ et $e^{p_2 T_e}$ et remplaçons pour finir p_1 et p_2 par leurs expressions :

$$G(z) = \frac{K \left(1 + e^{-2\xi\omega_n T_e} - 2e^{-\xi\omega_n T_e} \cos \omega_n T_e \sqrt{1 - \xi^2} \right)}{z^2 - 2ze^{-\xi\omega_n T_e} \cos \omega_n T_e \sqrt{1 - \xi^2} + e^{-2\xi\omega_n T_e}}$$

2.5.2 Prédiction des performances dynamiques

a) Principe

L'une des méthodes les plus simples consiste à rechercher l'équivalent en temps continu de la boucle d'asservissement en temps discret en prenant soin de ne pas oublier les bloqueurs d'ordre 0, si nécessaires. On évalue alors les performances dynamiques de ce système en temps continu en assimilant son fonctionnement à celui d'un système du second ordre.

Pour simplifier les calculs, on prend l'habitude d'effectuer une approximation sur la fonction de transfert du bloqueur d'ordre 0, approximation qui apparaît comme raisonnable si la fréquence d'échantillonnage est suffisamment élevée :

$$B_0(p) = \frac{1 - e^{pT_e}}{p} \approx e^{-\frac{pT_e}{2}} \approx \frac{1}{1 + \frac{T_e p}{2}}$$

b) Exemple

On considère le système échantillonné asservi représenté sur la figure 12.15 et soumis à un échelon unitaire ; la période d'échantillonnage est réglée sur $T_e = 0,2$ s.

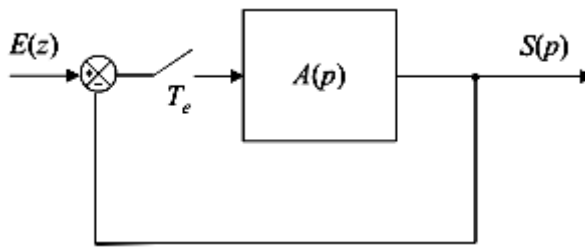


Figure.2.15 : Asservissement continu commandé par un signal échantillonné

On donne :

$$A(p) = \frac{4}{1 + p}$$

Recherchons l'équivalent en temps continu de cette boucle d'asservissement en temps discret: un bloqueur d'ordre 0 est nécessaire pour assurer la commande du système $A(p)$. On obtient alors le schéma équivalent de la figure 2.16.

La fonction de transfert en boucle ouverte de ce système en temps continu a pour expression :

$$G(p) = \frac{4}{\left(1 + \frac{T_e p}{2}\right)(1+p)} = \frac{4}{\left(1 + \frac{p}{10}\right)(1+p)}$$

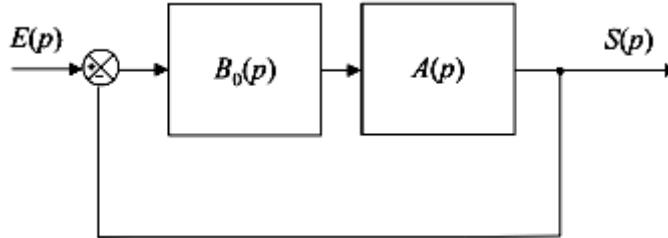


Figure.12.16 : Équivalence du système en temps continu

Calculons la pulsation de coupure à 0 dB et la marge de phase de ce système :

$$G(\omega) = \frac{10}{\sqrt{1+\omega^2} \sqrt{1+\frac{\omega^2}{100}}}$$

$$G(\omega) = 1 \Leftrightarrow (1+\omega^2) \left(1+\frac{\omega^2}{100}\right) = 16 \Leftrightarrow \frac{\omega^4}{100} + \frac{101\omega^2}{100} - 15 = 0$$

La seule solution réelle positive de cette équation est : $\omega_{c0} = 3,6 \text{ rad/s}$

Par conséquent, en considérant les relations approchées à propos des performances des systèmes à temps continu, nous pouvons en déduire une estimation du temps de montée en boucle fermée :

$$t_m \approx \frac{3}{\omega_{c0}} \approx 0,8s$$

Calculons à présent la marge de phase :

$$\Delta\varphi = \pi + \varphi(\omega_{c0}) = \pi - \arctan \frac{\omega_{c0}}{10} - \arctan \omega_{c0}$$

$$\text{Soit : } \Delta\varphi = 85^\circ \Rightarrow \xi_{BF} \approx 0,85$$

Ce coefficient d'amortissement en boucle fermée correspond à un dépassement de 0,6%, autrement dit, le système devrait présenter un dépassement imperceptible.

En conclusion, nous considérerons que le système échantillonné initial possède pour performances dynamiques :

$$t_m \approx 0,8s$$

$$dep \approx 0$$

Cette étude a par ailleurs permis de démontrer que le dispositif était caractérisé par une marge de phase relativement importante, montrant ainsi que le système est très stable en boucle fermée.

c) Validation des résultats obtenus

Considérons, pour valider les résultats obtenus précédemment, l'équivalent en z de la boucle d'asservissement étudiée (figure 2.17).

D'après la table d'équivalence :

$$A(z) = \frac{4(1 - e^{-T_e})}{(z - e^{-T_e})}$$

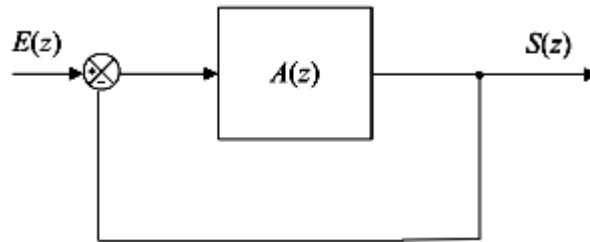


Figure.12.17 : Modèle à temps discret de la boucle d'asservissement

La fonction de transfert en boucle fermée a pour expression :

$$H(z) = \frac{A(z)}{1 + A(z)} = \frac{4(1 - e^{-T_e})}{(z - e^{-T_e}) + 4(1 - e^{-T_e})}$$

Soit :

$$H(z) = \frac{0,72}{z - 0,1}$$

Or :

$$\frac{S(z)}{E(z)} = \frac{0,72}{z - 0,1} \Rightarrow (z - 0,1)S(z) = 0,72E(z)$$

Soit :

$$(z - 0,1)S(z) = 0,72E(z)$$

Ce qui correspond à l'équation de récurrence suivante :

$$s(k) = 0,1s(k-1) + 0,72e(k-1)$$

Le système étant commandé par un échelon, la suite $e(k)$ est connue et cette équation nous permet de calculer, échantillon par échantillon, les différentes valeurs de la suite $s(k)$ (tab.2.1).

t	0	0,2s	0,4s	0,6s	0,6s	1,0s	1,2s
$e(k)$	1	1	1	1	1	1	1
$s(k)$	0	0,720	0,792	0,799	0,800	0,800	0,800

Tableau.2.1 : Simulation de la suite d'échantillons

Nous y remarquons l'absence de dépassement perceptible (ce qui est tout à fait conforme au système continu équivalent) et pouvons y mesurer le temps de montée qui est tout à fait conforme aux prédictions calculées à partir de notre modèle. Nous pouvons également vérifier la valeur de l'erreur de position prévue par notre modèle :

$$\varepsilon_p = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1 + A(z)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z - e^{-T_e}}{z - e^{-T_e} + 4(1 - e^{-T_e})}$$

Soit :

$$\varepsilon_p = \frac{1 - 0,82}{1 - 0,82 + 4(1 - 0,82)} = 0,2 = 20\%$$

Chapitre 3

Correction des systèmes échantillonnés asservis

3.1 PRINCIPES GÉNÉRAUX

3.1.1 Rappel du cahier des charges d'un asservissement

Les systèmes échantillonnés comme les systèmes à temps continu, doivent en général satisfaire à un cahier des charges qui impose, en boucle fermée, un certain nombre de performances (qui d'ailleurs sont les mêmes qu'en temps continu) : précision, rapidité, marge de stabilité et limitation du dépassement.

3.1.2 Rôle du correcteur

Si l'on s'en tenait là, nous ne pourrions malheureusement que prédire et constater les performances (ou les contre-performances) de la boucle d'asservissement sans pouvoir agir sur celles-ci. Il y a peu de chance, alors, que le cahier des charges soit respecté. L'idée consiste, ici encore, à introduire dans la chaîne directe, en amont du système $A(z)$, un dispositif supplémentaire de fonction de transfert $C(z)$, appelé correcteur numérique et dont le rôle essentiel doit consister à modifier les performances du système initial (figure 13.2). Cela revient à dire que nous transformons les fonctions de transfert en boucle ouverte et en boucle fermée de manière à imposer à l'ensemble de fonctionner selon le cahier des charges voulu.

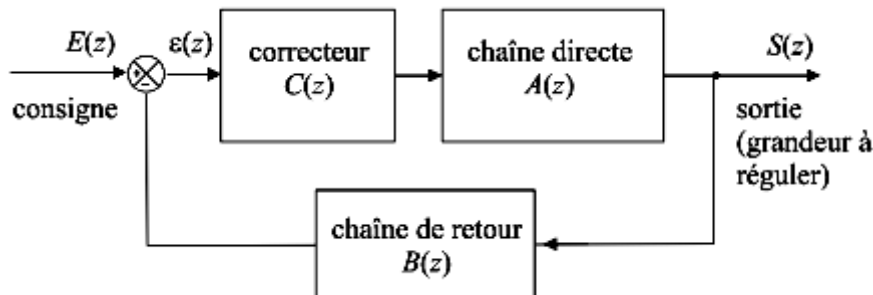


Figure.3.1 : Schéma général d'un système échantillonné asservi et corrigé.

Si $G_i(z)$ et $H_i(z)$ sont les fonctions de transfert en boucle ouverte et en boucle fermée du système initial et $G_c(z)$ et $H_c(z)$ les fonctions de transfert en boucle ouverte et en boucle fermée du système corrigé, on aura :

$$G_i(z) = A(z)B(z)H_i(z) = \frac{A(z)}{1 + A(z)B(z)}$$

Et :

$$G_c(z) = A(z)B(z)C(z)H_c(z) = \frac{A(z)C(z)}{1 + A(z)B(z)C(z)}$$

Tout l'art de la correction des systèmes échantillonnés consiste à choisir la bonne fonction de transfert $C(z)$ pour ce correcteur numérique de manière à régler chaque performance sur sa valeur requise, sans perturber, bien sûr, le fonctionnement du système. Ces corrections sont en général assurées par un ordinateur.

3.1.3 Correction numérique d'un système à temps continu

Très souvent, on choisit, pour des questions de souplesse et de précision, de corriger numériquement un système à temps continu. Le schéma de la boucle d'asservissement correspondante est représenté sur la figure 3.2. Un bloqueur doit, bien entendu, être intercalé entre le correcteur numérique et le système à commander.

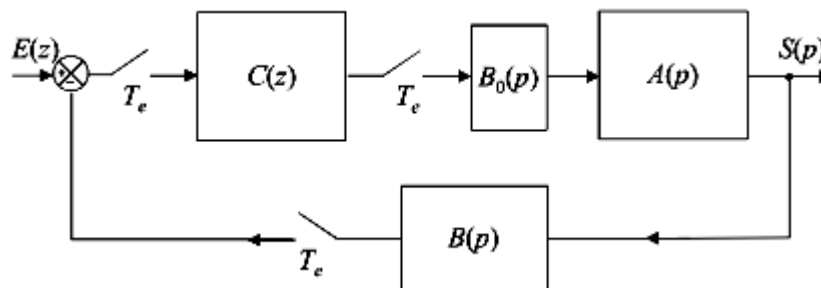


Figure.3.2 : Asservissement continu commandé et corrigé numériquement.

Dans ce cas, les techniques de recherche d'un équivalent de la boucle d'asservissement étudiées au chapitre précédent pourront s'appliquer, que ce soit un équivalent à temps continu ou à temps discret.

3.1.4 Problèmes spécifiques liés aux correcteurs numériques

Dans le cas des systèmes à temps continus, il a été relativement facile d'identifier les trois actions correctives simples : action proportionnelle, action dérivée et action intégrale et visualiser immédiatement, par exemple sur un diagramme de Bode, l'influence que ce type d'action avait sur le comportement fréquentiel, donc sur les performances.

Les choses ne sont pas si simples lorsqu'il s'agit d'asservissements échantillonnés. En effet, les formes diverses et variées des équations de récurrence des systèmes posent parfois problème lorsqu'il s'agit de conclure à des résultats généraux.

Certes, on peut toujours présupposer un principe d'équivalence entre les actions correctives élémentaires en temps continu et la forme correspondante en z :

Action proportionnelle : $C(p) = K \longleftrightarrow C(z) = K$

Action intégrale : $C(p) = \frac{1}{p} \longleftrightarrow C(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$

Action dérivée : $C(p) = p \longleftrightarrow C(z) = 1-z^{-1}$

Toutefois, il est hors de question, ici, d'imaginer corriger intuitivement un système échantillonné en introduisant telle ou telle action corrective élémentaire (hormis l'action intégrale qui, elle, est sans trop de surprises et qui améliore systématiquement la précision en boucle fermée). Ainsi, l'introduction du gain inférieur à 1 n'augmente pas obligatoirement la stabilité, de même que la rapidité n'est pas forcément affectée par l'introduction d'un dérivateur.

3.2 TENTATIVES D' ACTIONS CORRECTIVES SIMPLES

3.2.1 Amélioration de la précision

Comme mentionné précédemment, peu de surprises ici. L'action intégrale améliore la précision du système, mais, attention, elle peut bousculer les autres performances, de manière souvent imprévisible (au sens de la perception *temps continu* que l'on a peut-être de cette action corrective).

a) Correcteur à action intégrale

L'étude menée au chapitre précédent à propos de la précision d'un système asservi à temps discret nous a conduit à la conclusion suivante : la présence, dans la fonction de transfert en boucle ouverte, d'un intégrateur (i.e. d'un pôle égal à 1) assure la nullité de l'erreur de position, c'est-à-dire la précision statique parfaite. Si ce pôle est au moins double (s'il y a au moins deux intégrateurs dans la chaîne directe), l'erreur de vitesse est nulle, autrement dit la précision dynamique parfaite est assurée. Par conséquent, pour améliorer simplement la précision, en boucle fermée, d'un système à temps discret, on peut choisir un correcteur de fonction de transfert égale à :

$$C(z) = \frac{K}{(1-z^{-1})^n}$$

On choisira $n = 1$ si le cahier des charges impose uniquement une condition de nullité de l'erreur de position et $n = 2$ si l'erreur de vitesse doit être nulle également.

b) Conséquence sur les autres performances

Analysons au travers d'un exemple simple, l'influence de l'introduction d'un intégrateur sur le comportement global d'un asservissement. Soit un système à temps discret de fonction de transfert en boucle ouverte $G(z)$ placé dans une boucle à retour unitaire, avec :

$$G(z) = \frac{2}{1-0,5z^{-1}} = \frac{2z}{z-0,5}$$

Soit, en boucle fermée :

$$H(z) = \frac{2z}{3z-0,5}$$

Ce qui correspond à l'équation de récurrence : $s(k) = 0,17s(k-1) + 0,67e(k)$

Ce système est stable en boucle fermée puisque l'unique pôle de la fonction de transfert en boucle fermée est inférieur à 1.

Soit :

$$p_1 = \frac{0,5}{3} = 0,17 < 1$$

Considérons les suites d'échantillons d'entrée (échelon unité) et de sortie (tableau 3.1) et représentons-les graphiquement (figure 3.3).

$e(k)$	1	1	1	1	1	1	1
$s(k)$	0.667	0.777	0.796	0.799	0.800	0.800	0.800

Tableau.3.1 : Simulation de la suite d'échantillons

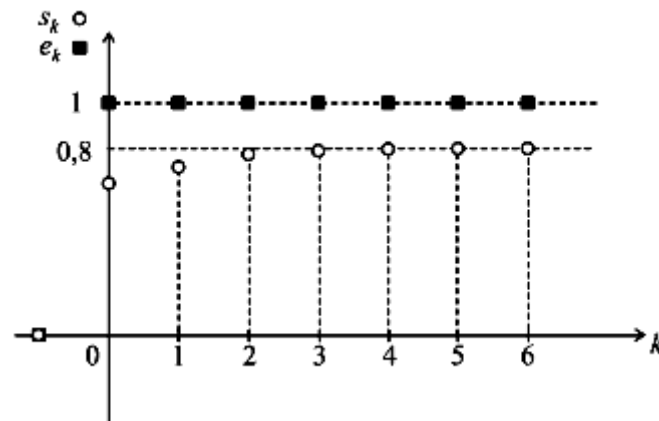


Figure.3.3 : Représentation temporelle du comportement du système en boucle fermée.

L'erreur de position a pour valeur :

$$\varepsilon_p = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1 + G(z)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1 + \frac{2z}{z - 0,5}} = \frac{1 - 0,5}{1 - 0,5 + 2} = 0,2 = 20\%$$

Introduisons un intégrateur dans la chaîne directe. On a, à présent :

$$G(z) = \frac{K}{1 - z^{-1}} \frac{2z}{z - 0,5} = \frac{2z^2}{(z - 1)(z - 0,5)} \quad \text{avec } K = 1 \text{ dans un premier temps.}$$

Soit, en boucle fermée :

$$H(z) = \frac{2z^2}{(z - 1)(z - 0,5) + 2z^2} = \frac{2z^2}{3z^2 - 1,5z + 0,5}$$

Ou encore :

$$H(z) = \frac{2}{3 - 1,5z^{-1} + 0,5z^{-2}}$$

Ce qui correspond à l'équation de récurrence : $s(k) = 0,5s(k - 1) - 0,17s(k - 2) + 0,67e(k)$

Les pôles de cette fonction de transfert (les racines de l'équation $3z^2 - 1,5z + 0,5$) se calculent aisément et on peut vérifier sans peine que leurs modules sont inférieurs à 1. La condition de stabilité est donc toujours vérifiée.

En effet : $\Delta = b^2 - 4ac = (1,5)^2 - 6 = -3,75$

$$p_{1/2} = \frac{1,5 \pm j\sqrt{3,75}}{6} \Rightarrow |p_1| = |p_2| = 0,41$$

Toutefois, les modules de ces pôles sont plus proches de 1 que l'unique pôle du système non corrigé (qui était égal à 0,17). On peut donc en déduire que la marge de stabilité est légèrement diminuée par l'ajout du correcteur (elle reste néanmoins très confortable).

Construisons un tableau avec les suites d'échantillons d'entrée (échelon unité) et de sortie (tableau 3.2) et représentons-les graphiquement (figure 3.4).

$e(k)$	1	1	1	1	1	1	1
$s(k)$	0.667	1.000	1.056	1.028	1.005	0.998	0.998

Tableau 3.2 Simulation de la suite d'échantillons

On note la présence d'un faible dépassement (environ 6 %) ce qui corrobore la légère perte de marge de stabilité et une rapidité accrue puisque le temps de montée correspond à l'échantillon $k = 1$, soit $t_m = T_e$.

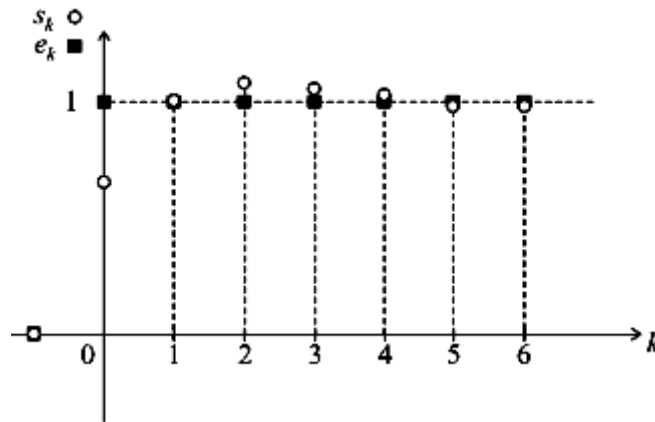


Figure.3.4 : Représentation temporelle du comportement du système en BF après correction.

3.2.2 Compensation de la perte de stabilité par placement des pôles

Reprenons le système que nous venons d'étudier en ajoutant un gain K dans la chaîne directe en plus de l'intégrateur. On a donc maintenant :

$$G(z) = \frac{K}{1-z^{-1}} \cdot \frac{2z}{z-0,5} = \frac{2Kz^2}{(z-1)(z-0,5)} \quad \text{avec } K \neq 1$$

Soit, en boucle fermée :

$$H(z) = \frac{2Kz^2}{(1+2K)z^2 - 1,5z + 0,5}$$

Cette fois, on a :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1,5)^2 - 2(1+2K) = 0,25 - 4K$$

Pour augmenter la marge de stabilité, on doit chercher à réduire le module des pôles. Le discriminant restant négatif tant que $K > 0,0625$, nous pouvons partir du principe que les pôles resteront complexes conjugués :

$$p_{1/2} = \frac{1,5 \pm j\sqrt{4K-0,25}}{2(1+2K)}$$

Soit :

$$|p_1| = |p_2| = \frac{\sqrt{(1,5)^2 + 4K - 0,25}}{2(1+2K)} = \frac{1}{\sqrt{2(1+2K)}}$$

Il suffit de choisir une valeur de K qui correspond à une valeur souhaitée pour le module de chaque pôle, par exemple :

$$|p_1| = |p_2| = 0,25 \quad \text{pour } K = 3,5$$

On a alors :

$$H(z) = \frac{7}{8 - 1,5z^{-1} + 0,5z^{-2}}$$

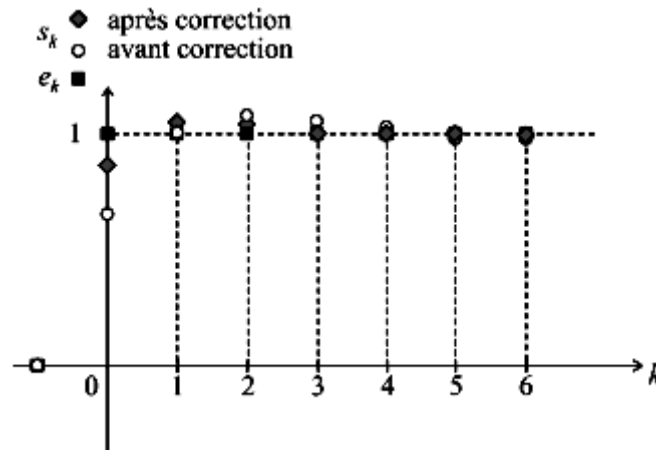
ce qui correspond à l'équation de récurrence:

$$s(k) = 0,1875s(k-1) - 0,0625s(k-2) + 0,875e(k)$$

$e(k)$	1	1	1	1	1	1	1
$s(k)$	0.875	1.039	1.015	1.000	0.999	1.000	1.000

Tableau.3.3 : Simulation de la suite d'échantillons

On note bien la présence d'un amortissement plus prononcé, ce qui correspond bien à une augmentation de la marge de stabilité

**Figure.3.5** : Représentation temporelle du comportement du système en B.F après correction.

3.2.3 Action dérivée

Un correcteur numérique à action dérivée possède une fonction de transfert $C(z)$ égale à :

$$C(z) = K(1 - z^{-1}) \text{ avec } K > 0$$

Analysons, au travers d'un exemple simple, l'influence d'un tel correcteur. Soit $A(z)$ un système échantillonné placé dans une boucle de régulation à retour unitaire et précédé d'un correcteur à action dérivée, avec :

$$A(z) = \frac{1}{(z - 0,1)}$$

La fonction de transfert en boucle fermée du système non corrigé est :

$$H_i(z) = \frac{A(z)}{1 + A(z)} = \frac{1}{z + 0,9}$$

L'unique pôle de cette fonction de transfert est :

$$p_1 = -0,9$$

Ce pôle possède bien un module inférieur à 1 mais sa valeur est proche de la limite d'instabilité ; le système est donc stable en boucle fermée mais mériterait sans doute d'être corrigé pour disposer d'une marge de sécurité plus confortable. L'équation de récurrence en boucle fermée étant :

$$s(k) = -0,9s(k-1) + e(k-1)$$

On peut aisément calculer et représenter graphiquement la suite des échantillons de sortie lorsque l'entrée est un échelon unité pour constater qu'effectivement, le système est stable, mais peu stable si l'on en croit le régime oscillatoire très peu amorti. De plus, il est très peu précis.

$e(k)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$s(k)$	0	1	0.1	0.910	0.181	0.837	0.247	0.778	0.300

Tableau.3.4 : Simulation de la suite d'échantillons

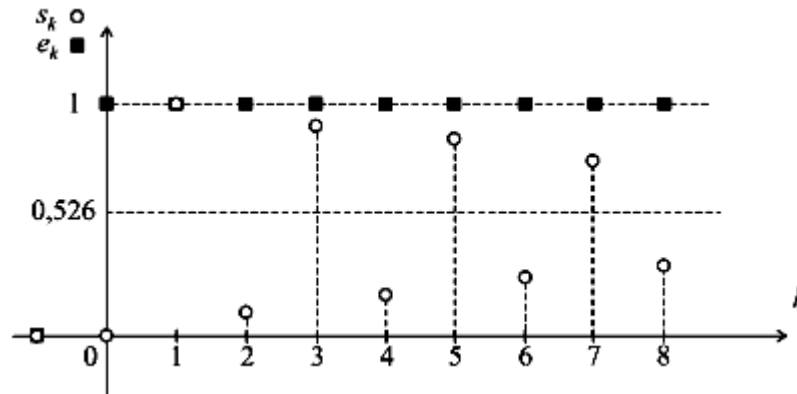


Figure.3.6 : Représentation temporelle du comportement du système en B.F avant correction.

En présence du correcteur à action dérivée, on a :

$$G(z) = C(z)A(z) = \frac{K(1-z^{-1})}{z-0,1} = \frac{K(z-1)}{z(z-0,1)}$$

Remarque : compte tenu des connaissances que nous avons acquises pour les systèmes à temps continu, nous nous attendons à ce que la stabilité du système soit améliorée.

La fonction de transfert en boucle fermée du système corrigé est donc :

$$H(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)} = \frac{K(z-1)}{z(z-0,1)+K(z-1)} = \frac{K(z-1)}{z^2+(K-0,1)z-K}$$

L'équation de récurrence correspondante est :

$$s(k) = (0,1-K)s(k-1) + Ks(k-2) + Ke(k-1) + Ke(k-2)$$

Calculons les pôles de cette fonction de transfert.

Cette fois, on a : $\Delta = b^2 - 4ac = (K-0,1)^2 + 4K$

Ce discriminant étant toujours positif, on a :

$$p_{1/2} = \frac{-(K-0,1) \pm j\sqrt{(K-0,1)^2 + 4K}}{2}$$

Soit :

$$|p_1| = \frac{0,1-K + \sqrt{(K-0,1)^2 + 4K}}{2}$$

Et :

$$|p_2| = \frac{K-0,1 + \sqrt{(K-0,1)^2 + 4K}}{2}$$

On peut représenter, sur un même graphique, les variations de $|p_1|$ et de $|p_2|$ en fonction de K (figure 3.7).

Pour que le système soit stable, il faut que les deux pôles aient un module inférieur à 1.

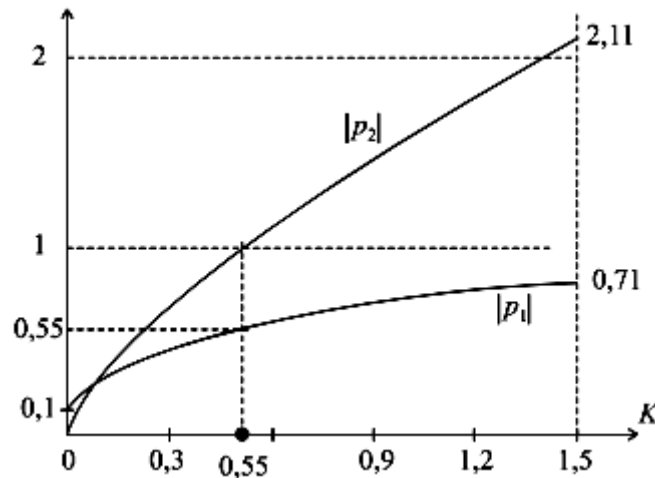


Figure.3.7 : Variations des modules des pôles en fonction du gain K .

On en déduit donc : $K < 0,55$

Choisissons par exemple $K = 0,4$ puis calculons et traçons la suite d'échantillons en sortie du système lorsque celui-ci est soumis à un échelon unité (tableau 3.5 et figure 3.8).

Dans ce cas, on a : $s(k) = -0,3s(k-1) + 0,4s(k-2) + 0,4e(k-1) - 0,4e(k-2)$

$e(k)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$s(k)$	0	0.400	-0.120	0.196	-0.181	-0.107	0.110	0.067	-0.050

Tableau.3.5 : Simulation de la suite d'échantillons

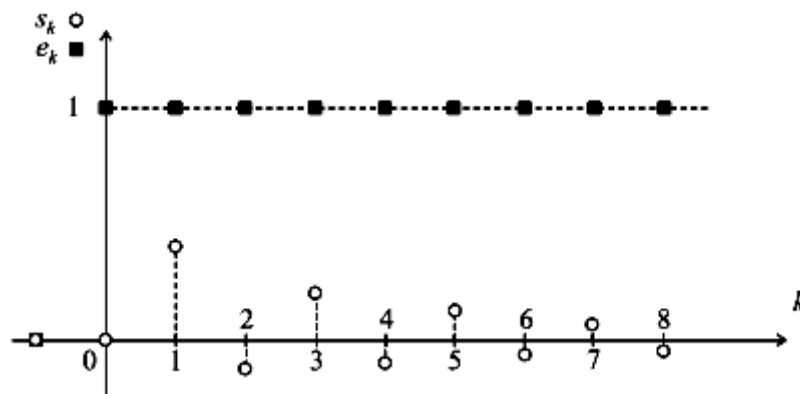


Figure.3.8 : Représentation temporelle du comportement du système en B.F après correction.

Le système est effectivement plus stable puisqu'il converge vers une valeur finie beaucoup plus vite, ce qui est conforme au calcul des nouveaux pôles.

Soit : $|p_1| = 0,5$

et : $|p_2| = 0,8$

Toutefois, ce type de correction est inacceptable puisque l'erreur de position atteint à présent 100 %.

3.3 SYNTHÈSE D'UN CORRECTEUR NUMÉRIQUE PAR DISCRÉTISATION D'UN CORRECTEUR CONTINU

3.3.1 Principe

La méthode que nous allons présenter s'adapte particulièrement bien aux problèmes de synthèse d'une correction numérique d'un asservissement continu (figure 3.9). Nous supposons donc que nous cherchons à asservir un système de fonction de transfert $A(p)$ au moyen d'un correcteur $C(z)$. Pour simplifier, nous supposons que la boucle est à retour unitaire.

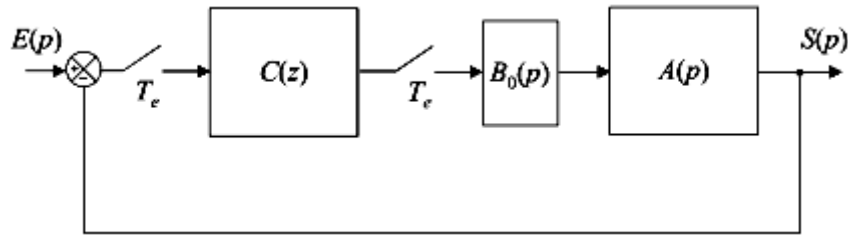


Figure 3.9 Asservissement continu corrigé numériquement.

La technique consiste à étudier cet asservissement en temps continu (comme représenté sur la figure 3.10) puis à rechercher le modèle numérique équivalent au correcteur continu $C(p)$ que nous aurons calculé pour conférer au système les performances d'un cahier des charges.

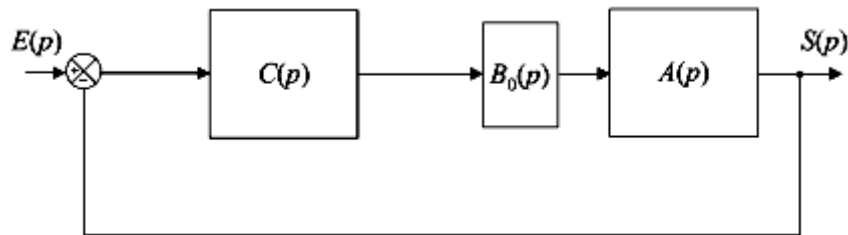


Figure 3.10 Modèle à temps continu de l'asservissement.

En théorie, il faut tenir compte de la présence du bloqueur dans l'étude en temps continu. Toutefois, une fréquence d'échantillonnage suffisamment grande peut nous permettre de le négliger. Dans ces conditions, on est ramené *stricto sensu* à l'étude du système en continu.

Le cahier des charges imposé au système nous amène au calcul classique de la fonction de transfert du correcteur et il suffit, ensuite, de rechercher un équivalent discret de cette fonction de transfert. Les équivalences qui peuvent être utilisées sont :

- l'équivalence à la dérivation : $p \longleftrightarrow \frac{1-z^{-1}}{T_e}$
- la transformation bilinéaire : $p \longleftrightarrow \frac{2(1-z^{-1})}{T_e(1+z^{-1})}$
- la transformation bilinéaire : $p - p_i \longleftrightarrow z - e^{p_i T_e}$

Remarque : rappelons à propos de cette équivalence temporelle que les tables fournies en annexe proposent des équivalents qui sont spécifiquement adaptés pour conserver le gain statique du système.

On donne :

$$G(p) = \frac{1}{p - p_i} \longleftrightarrow G(z) = \left(-\frac{1}{p_i} \right) \frac{1 - e^{p_i T_e}}{z - e^{p_i T_e}}$$

De sorte que :

$$G(0) = \frac{1}{0 - p_i} \longleftrightarrow G(1) = \left(-\frac{1}{p_i} \right) \frac{1 - e^{p_i T_e}}{z - e^{p_i T_e}}$$

On peut choisir de conserver la valeur du gain pour une autre fréquence que la fréquence nulle, notamment pour la fréquence autour de laquelle porte la correction du système.

3.3.2 Exemple

On souhaite asservir un système continu de fonction de transfert $G(p)$ en utilisant un correcteur numérique et en imposant le cahier des charges suivant :

- Marge de phase $\Delta\varphi = 45^\circ$
- Temps de montée $t_m = 0,2s$

On donne :

$$G(p) = \frac{K}{\left(\frac{p}{10} + 1 \right)^3} \quad \text{avec } K > 0 \text{ réglable}$$

a) Synthèse du correcteur en temps continu

La valeur de K qui assure le temps de montée voulu se calcule en utilisant la relation approchée :

$$\omega_{c0} \approx \frac{3}{t_m} \approx 15 \text{ rad/s}$$

On a alors :

$$G(\omega_{c0}) = 1 \Rightarrow K = 5,86$$

Pour cette valeur de K , on obtient une marge de phase égale à :

$$\Delta\varphi = \pi + \varphi(\omega_{c0}) = \pi - 3 \arctan \frac{15}{10} = 11^\circ$$

Il est donc nécessaire d'introduire un correcteur à avance de phase caractérisé par une remontée de phase de 34° centrée sur la pulsation ω_{c0} .

Soit :

$$C(p) = \frac{1 + aTp}{1 + Tp}$$

avec :

$$\varphi_{\max} = \arcsin \frac{a-1}{a+1} \Rightarrow a = 3,55$$

et :

$$\frac{1}{T\sqrt{a}} = \omega_{c0} \Rightarrow T = 0,0355s$$

d'où :

$$C(p) = \frac{1 + 0,124p}{1 + 0,035p}$$

b) Calcul du correcteur numérique équivalent

Utilisons, pour simplifier, l'équivalence à la dérivation :

$$p \longleftrightarrow \frac{1 - z^{-1}}{T_e}$$

Soit :

$$C(z) = \frac{1 + 0,124 \left(\frac{1 - z^{-1}}{T_e} \right)}{1 + 0,035 \left(\frac{1 - z^{-1}}{T_e} \right)}$$

Choisissons la fréquence d'échantillonnage de sorte qu'elle soit comprise entre 6 fois et 25 fois la bande passante du système. Cette bande passante est telle que :

$$G(2\pi f_{pas}) = \frac{5,86}{\left(\sqrt{\frac{4\pi^2 f_{pas}^2}{100}} + 1 \right)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow f_{pas} = 2,8 \text{ Hz}$$

On choisit par exemple : $f_e = 100 \text{ Hz} \Leftrightarrow T_e = 0,01 \text{ s}$

Finalement :

$$C(z) = \frac{1 + 12,4(1 - z^{-1})}{1 + 3,5(1 - z^{-1})} = \frac{13,4z - 12,4}{4,5z - 3,5}$$

c) Validation des résultats

Validons ces résultats, bien évidemment en recherchant le modèle à temps discret équivalent à l'ensemble de l'asservissement. Prenons l'équivalent le plus simple pour la fonction $G(p)$, autrement dit l'équivalent à la dérivation :

$$G(z) = \frac{5,86}{\left(\frac{1 - z^{-1}}{10T_e} + 1 \right)^3} = \frac{5,86}{(11 - 10z^{-1})^3}$$

La fonction de transfert en boucle fermée est :

$$H(z) = \frac{C(z)G(z)}{1 + C(z)G(z)} = \frac{5,86(13,4z - 12,4)}{(11 - 10z^{-1})^3 (4,5z - 3,5) + 5,86(13,4z - 12,4)}$$

Soit :

$$H(z) = \frac{5,86(13,4 - 12,4z^{-1})}{(11 - 10z^{-1})^3 (4,5 - 3,5z^{-1}) + 5,86(13,4 - 12,4z^{-1})}$$

$$H(z) = \frac{78,5 - 72,5z^{-1}}{6068 - 21066z^{-1} + 27555z^{-2} - 16050z^{-3} + 3500z^{-4}}$$

d'où l'équation de récurrence correspondante :

$$s(k) = 3,47s(k-1) - 4,54s(k-2) + 2,65s(k-3) - 0,58s(k-4) + 0,01294e(k) - 0,01195e(k-1)$$

k	0	5	10	15	20	25	30	35	40
t	0	0.05s	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40
$e(k)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$s(k)$	0	0.400	-0.120	0.196	-0.181	-0.107	0.110	0.067	-0.050

Tableau.3.6 : Simulation de la suite d'échantillons

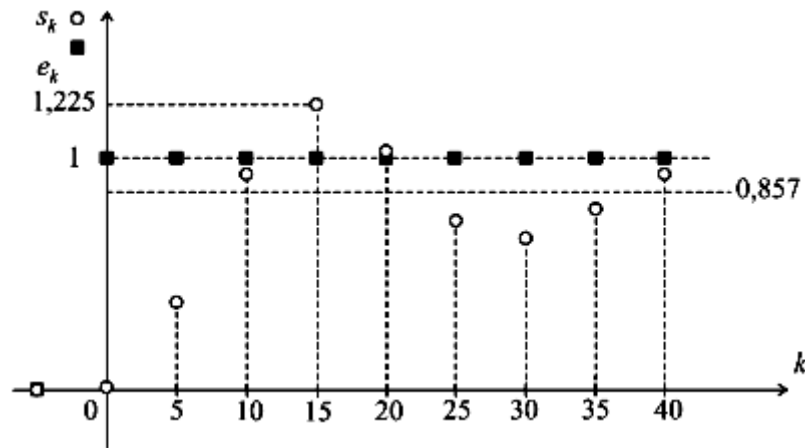


Figure.3.11 : Représentation temporelle du comportement du système en B.F après correction.

Le temps de montée peut être repéré vers le douzième échantillon, soit $t_m \approx 0,12$ s.

Par ailleurs, le dépassement, visiblement égal à 40 %, correspond à un coefficient d'amortissement en boucle fermée d'environ 0,3.

On a alors : $\xi_{BF} = 0,3 \Rightarrow \Delta\varphi \approx 30^\circ$

Les performances constatées sont voisines des performances attendues, même si le système est un peu plus rapide et un peu moins stable que prévu. Ces différences s'expliquent par les nombreuses approximations que nous avons effectuées. Compte tenu de l'ensemble de ces approximations, le résultat obtenu est relativement bon.

3.4 SYNTHÈSE D'UN CORRECTEUR NUMÉRIQUE PAR MÉTHODE POLYNOMIALE

3.4.1 Principe

Les méthodes polynomiales figurent parmi les méthodes de synthèse de correcteurs numériques les plus utilisées. Elles sont en effet très souples et relativement simples à mettre en œuvre. Considérons un système échantillonné de fonction de transfert $A(z)$ placé dans une boucle à retour unitaire en cascade avec un correcteur $C(z)$ que l'on cherche à déterminer pour conférer au système complet, en boucle fermée, des performances dictées par un cahier des charges : précision, amortissement, rapidité, marge de stabilité.

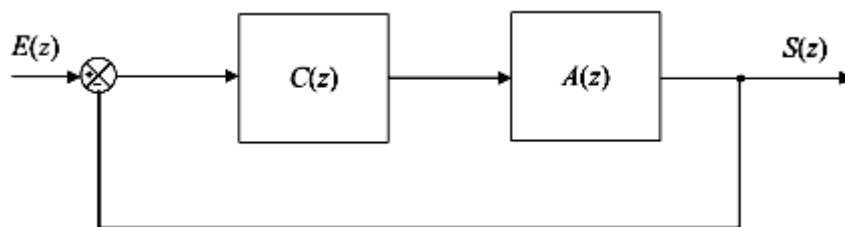
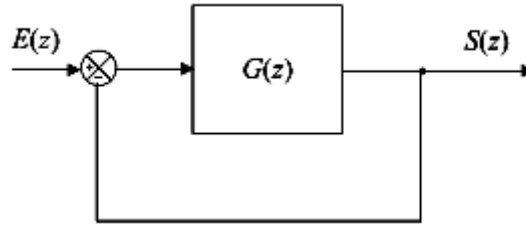


Figure.3.12 : Boucle d'asservissement échantillonné avec correcteur.

D'une manière générale, l'objectif de l'action corrective consiste à rechercher $C(z)$ pour que cette boucle d'asservissement de fonction de transfert en boucle ouverte $G(z)$ possède les caractéristiques attendues.

**Figure.3.13 :** Boucle d'asservissement équivalente.

La technique de la synthèse par méthode polynomiale consiste à corriger le système de sorte que $G(z)$ corresponde à un système du second ordre, de fonction de transfert :

$$G(z) = \frac{K \left(1 + e^{-2\xi\omega_n T_e} - 2e^{-\xi\omega_n T_e} \cos \omega_n T_e \sqrt{1-\xi^2} \right)}{z^2 - 2ze^{-\xi\omega_n T_e} \cos \omega_n T_e \sqrt{1-\xi^2} + e^{-2\xi\omega_n T_e}}$$

(Voir chapitre 2, paragraphe 2.5.1.)

Dans ces conditions, la fonction de transfert en boucle fermée $H(z)$ est aussi une fonction du second ordre :

$$H(z) = \frac{K_{BF} \left(1 + e^{-2\xi_{BF}\omega_{nBF} T_e} - 2e^{-\xi_{BF}\omega_{nBF} T_e} \cos \omega_{nBF} T_e \sqrt{1-\xi_{BF}^2} \right)}{z^2 - 2ze^{-\xi_{BF}\omega_{nBF} T_e} \cos \omega_{nBF} T_e \sqrt{1-\xi_{BF}^2} + e^{-2\xi_{BF}\omega_{nBF} T_e}}$$

Nous savons que les performances en boucle fermée, pour un tel système, se traduisent par des conditions sur ω_{nBF} pour la rapidité et sur ξ_{BF} pour la marge de stabilité et, bien évidemment, pour l'amortissement.

En effet :

$$t_m \approx \frac{3}{\omega_{c0}} \approx \frac{3}{\omega_{nBF}}$$

et :

$$\xi_{BF} \approx \frac{\Delta\varphi^o}{100}$$

En ce qui concerne la précision, il suffit que $G(z)$ possède un pôle égal à 1 pour que l'erreur de position soit nulle.

Toutes ces considérations nous permettent donc de déterminer les fonctions $H(z)$ et $G(z)$ idéales, du second ordre, qui possèdent les performances requises. Pour que notre boucle d'asservissement initiale (figure 3.12) possède elle-même ces performances, il suffit d'avoir :

$$G(z) = C(z)A(z)$$

et donc, de placer dans la chaîne directe, le correcteur de fonction de transfert :

$$C(z) = \frac{G(z)}{A(z)}$$

3.4.2 Exemple

Considérons le système échantillonné à une période $T_e = 0,2$ s de fonction de transfert :

$$A(z) = \frac{z+0,3}{z-0,8}$$

On souhaite placer ce système dans une boucle à retour unitaire et on veut que le système possède, en boucle fermée, les performances suivantes : $\varepsilon_p = 0$, $t_m = 0,8$ s et $\xi_{BF} = 0,45$ (marge de phase d'un système continu équivalent égale à 45° et dépassement de l'ordre de 20 %).

Construisons la fonction $G(z)$ *a priori* : elle possède obligatoirement un pôle égal à 1 pour garantir une erreur de position nulle.

On a donc :

$$G(z) = \frac{a}{(z-1)(z-b)}$$

d'où :

$$H(z) = \frac{a}{(z-1)(z-b)+a} = \frac{a}{z^2 - (1+b)z + a+b}$$

Or nous devons, avoir, pour garantir les performances exigées :

$$H(z) = \frac{K_{BF} \left(1 + e^{-2\xi_{BF}\omega_{nBF}T_e} - 2e^{-\xi_{BF}\omega_{nBF}T_e} \cos \omega_{nBF}T_e \sqrt{1-\xi_{BF}^2} \right)}{z^2 - 2ze^{-\xi_{BF}\omega_{nBF}T_e} \cos \omega_{nBF}T_e \sqrt{1-\xi_{BF}^2} + e^{-2\xi_{BF}\omega_{nBF}T_e}}$$

avec :

$$\xi_{BF} = 0,45 \quad \text{et} \quad \omega_{nBF} = \frac{3}{t_m} = 3,75 \text{ rad / s}$$

d'où :

$$H(z) = \frac{0,39K_{BF}}{z^2 - 1,12z + 0,51}$$

Identifions les deux fonctions de transfert en boucle fermée :

$$\begin{cases} 1+b = 1,12 \\ a+b = 0,51 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0,12 \\ a = 0,39 \end{cases}$$

Le gain statique en boucle fermée est bien sûr égal à 1 puisque l'erreur de position est nulle.

$$G(z) = \frac{0,39}{(z-1)(z-0,12)}$$

$$C(z) = \frac{G(z)}{A(z)} = \frac{0,39(z-0,8)}{(z-1)(z-0,12)(z+0,3)}$$

Chapitre 4

Représentation d'état des systèmes à temps discret

4.1 PRINCIPE GÉNÉRAL

Tout comme les systèmes à temps continu, les systèmes à temps discret peuvent être placés sous forme de représentation d'état. Les deux formalismes sont très voisins. Deux approches traditionnelles sont souvent étudiées pour aborder la représentation d'état des systèmes discrets : la discrétisation des équations d'état continues et la représentation directe par analogie avec la représentation d'état en temps continu. C'est cette deuxième approche que nous avons privilégiée car elle permet de généraliser très rapidement les propriétés démontrées aux systèmes continus.

4.1.1 Variables d'état en temps discret

Dans la représentation d'état en temps continu, les schémas fonctionnels des systèmes ne comportant que des intégrateurs et des gains, il était possible, à partir de tels éléments, de reconstruire n'importe quelle fonction de transfert. En temps discret, il est possible de décomposer un système en utilisant des gains et des opérateurs dits de décalage, de fonctions de transfert z^{-1} . La figure 4.1 présente un exemple de système composé de tels éléments. On peut, dans un tel modèle, définir des variables d'état, que nous noterons $x_i(k)$ et qui représentent la valeur des signaux x_i aux instants kT_e , T_e étant la période d'échantillonnage de tous les signaux présents dans le système.

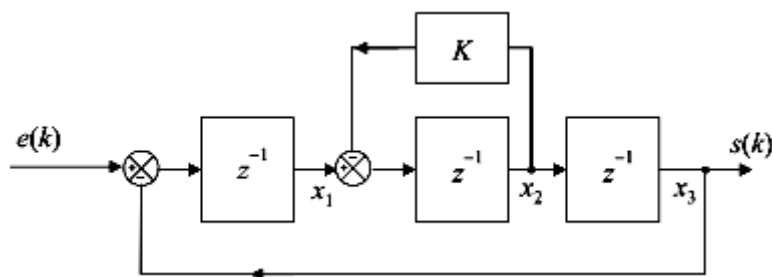


Figure.4.1 : Représentation d'état en temps discret.

Remarque : Rappelons ici que l'équation $X_3(z) = z^{-1}X_2(z)$ se traduit, en représentation temporelle à temps discret par la relation $x_3(k + 1) = x_2(k)$. D'où la dénomination d'opérateur de décalage.

4.1.2 Modélisation du fonctionnement du système

Dans une représentation en temps discret, la possibilité d'exprimer l'état du système à un instant donné en fonction du signal d'entrée et en fonction de son « passé », autrement dit, de son état précédent, prend tout son sens. La forme générale pour un système mono-entrée et mono-sortie des équations d'état en temps discret correspond donc à :

$$\begin{cases} x(k+1) = [A]x(k) + (B)e(k) \\ s(k) = (C)x(k) \end{cases}$$

La matrice de commande $[A]$ est une matrice carrée, (B) est un vecteur colonne et (C) est un vecteur ligne.

Remarque : pour un système d'ordre n , c'est-à-dire possédant n variables d'état, la première équation, dite de commande, correspond à un système de n équations :

$$\begin{cases} x_1(k+1) = a_{11}x_1(k) + a_{12}x_2(k) + \dots + a_{1n}x_n(k) + b_1e(k) \\ x_2(k+1) = a_{21}x_1(k) + a_{22}x_2(k) + \dots + a_{2n}x_n(k) + b_2e(k) \\ \vdots \\ x_n(k+1) = a_{n1}x_1(k) + a_{n2}x_2(k) + \dots + a_{nn}x_n(k) + b_ne(k) \end{cases}$$

Si le système possède plusieurs entrées et plusieurs sorties : soit n le nombre de variables d'état, m le nombre d'entrées et p le nombre de sorties. Dans ces conditions, la matrice de commande est toujours une matrice $n \times n$, $[B]$ est une matrice $n \times m$ et $[C]$ est une matrice $p \times n$. Pour être complet, il faut tenir compte d'une possible relation directe entre entrées et sorties. La matrice $[D]$, de dimensions $m \times p$ représente ce lien. Signalons pour finir que les coefficients des différentes matrices peuvent aussi être variables dans le temps (c'est-à-dire s'exprimer en fonction de k).

On a alors :

$$\begin{cases} x(k+1) = [A(k)]x(k) + [B(k)]e(k) \\ s(k) = [C(k)]x(k) + [D(k)]e(k) \end{cases}$$

On adopte fréquemment la représentation schématique de la figure 4.2 pour illustrer cette modélisation. Attention, dans cette représentation, les signaux sont en réalité des vecteurs de signaux à temps discret.

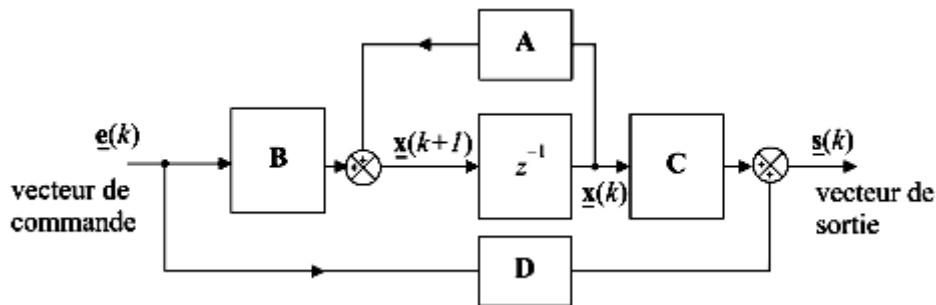


Figure.4.2 : Représentation schématique d'une modélisation d'état en temps discret.

Si les coefficients des différentes matrices sont constants, le système est dit invariant.

4.2 RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS D'ÉTAT

Nous nous limitons ici à l'étude des systèmes invariants possédant une seule entrée et une seule sortie. Formulons l'hypothèse que l'état du système à l'instant 0 est connu et que la suite d'échantillons d'entrée l'est également entre l'instant 0 et l'instant k_0-1 . Résoudre les équations d'état revient à rechercher l'état du système à l'instant k_0 . Comme cet état sera déterminé sans tenir compte de la valeur de l'échantillon d'entrée à cet instant, on parle ici de prédiction de l'état du système.

4.2.1 Résolution des équations d'état par discrétisation d'une solution continue

Soit le système d'équations d'état déterministe, à temps continu :

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Be(t) \\ s(t) = Cx(t) + De(t) \end{cases}$$

Où :
 $x(t)$, nx : un vecteur d'état
 $u(t)$, lx : un vecteur de commande
 $y(t)$, mx : un vecteur de sortie

La solution s'écrit :

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B e(\tau) d\tau \\ s(t) &= Cx(t) + De(t) \end{aligned}$$

Pour discrétiser le système, il faut disposer un convertisseur numérique-analogique pour transformer le vecteur $u(k)$ des séquences numériques d'entrée en vecteur de signaux à temps continu, et d'un convertisseur analogique-numérique pour transformer le vecteur des signaux de mesure en vecteur $y(k)$ de séquences numériques (figure 4.3).

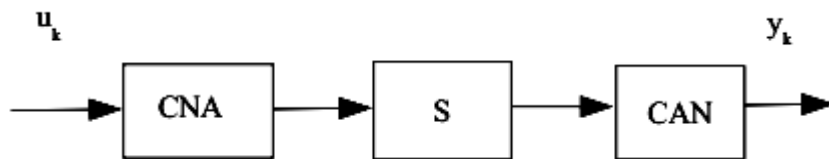


Figure.4.3 : Discrétisation d'un système continu

Soit T_e la période d'échantillonnage. Le CNA est un bloqueur d'ordre zéro (BOZ) :

$$\forall t \in [kT_e, (k+1)T_e], e(t) = e(k)$$

On peut alors calculer la solution d'état aux instants d'échantillonnage :

$$\begin{aligned} x[(k+1)T_e] &= e^{AT_e} x(kT_e) + \int_0^{T_e} e^{A(T_e-\tau)} B e(\tau) d\tau \\ x[(k+1)T_e] &= e^{AT_e} x(kT_e) + \int_0^{T_e} e^{A(T_e-\tau)} d\tau B e(k) \\ x[(k+1)T_e] &= e^{AT_e} x(kT_e) + [A^{-1}(e^{AT_e} - I)] B e(k) \end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{cases} x(k+1) = Fx(k) + Ge(k) \\ s(k) = Cx(k) + De(k) \end{cases}$$

Où $F = e^{AT_e}; G = A^{-1}(e^{AT_e} - I)B$

4.2.2 Prédiction de l'état du système à un instant quelconque

Procédons par itérations successives. On a :

$$\begin{cases} x(1) = [A]x(0) + (B)e(0) \\ x(2) = [A]x(1) + (B)e(1) \\ \vdots \\ x(i) = [A]x(i-1) + (B)e(i-1) \\ \vdots \\ x(k_0-1) = [A]x(k_0-2) + (B)e(k_0-2) \\ x(k_0) = [A]x(k_0-1) + (B)e(k_0-1) \end{cases}$$

Soit : $x(k_0) = [A]\{[A]x(k_0-2) + (B)e(k_0-2)\} + (B)e(k_0-1)$

d'où : $x(k_0) = [A]^2 x(k_0-2) + [A](B)e(k_0-2) + (B)e(k_0-1)$

En remplaçant successivement les $x(i)$, on obtient :

$$x(k_0) = [A]^{k_0} x(0) + \sum_{i=0}^{k_0-1} [A]^{k_0-1-i} (B)e(i)$$

Le principe des itérations successives est très intéressant à utiliser dans le cas où l'on recherche l'évolution de l'état du système pour tout instant sur l'intervalle $[0, k_0]$.

4.2.3 Exemple

Considérons un système régi par l'équation de commande :

$$x(k+1) = [A]x(k) + (B)e(k)$$

avec : $[A] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ et $(B) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Formulons l'hypothèse que ce système est sollicité par un échelon unité, soit $e(k) = 1$ pour tout $k \geq 0$ et cherchons la suite des 5 premiers échantillons correspondant aux deux signaux du vecteur d'état, soit $x_1(k)$ et $x_2(k)$. On suppose que l'état initial est caractérisé par $x(0) = 0$.

En procédant par itérations successives, on obtient aisément la suite correspondant au vecteur d'état à chaque instant d'échantillonnage.

$$\begin{cases} x(1) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ x(2) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \\ x(3) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ x(4) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} \\ x(5) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -16 \end{pmatrix} \end{cases}$$

4.3 COMMANDABILITÉ D'UN SYSTÈME À TEMPS DISCRET

La commandabilité des systèmes à temps discret s'étudie exactement de la même manière que pour les systèmes à temps continu.

4.3.1 Accessibilité

Un système est dit accessible à l'état $x(k_0)$ s'il est possible de déterminer une suite d'échantillons d'entrée $e(k)$ sur l'intervalle $[0, k_0-1]$ de manière à amener le système de état $x(0) = 0$ vers l'état $x(k_0)$.

Si un système est accessible quel que soit $x(k_0)$, il est dit complètement accessible.

Remarque : les notions d'accessibilité, de commandabilité et de gouvernabilité sont encore ici, généralement confondues.

4.3.2 Critère de commandabilité

Un système est complètement accessible et complètement commandable si et seulement si les vecteurs (\mathbf{B}) , $[\mathbf{A}](\mathbf{B})$, $[\mathbf{A}]^2(\mathbf{B})$, . . . , $[\mathbf{A}]^{n-1}(\mathbf{B})$ sont linéairement indépendants.

Cet énoncé peut se traduire également de la manière suivante : on définit la matrice de commandabilité ou de gouvernabilité par la matrice formée des n vecteurs colonnes (\mathbf{B}) , $[\mathbf{A}](\mathbf{B})$, $[\mathbf{A}]^2(\mathbf{B})$, . . . , $[\mathbf{A}]^{n-1}(\mathbf{B})$:

$$[\mathbf{C}]_{([\mathbf{A}](\mathbf{B}))} = [(\mathbf{B}) \quad [\mathbf{A}](\mathbf{B}) \quad [\mathbf{A}]^2(\mathbf{B}) \cdots [\mathbf{A}]^{n-1}(\mathbf{B})]$$

La paire $[\mathbf{A}]$, (\mathbf{B}) est complètement commandable si et seulement si la matrice de commandabilité est régulière, autrement dit si son déterminant n'est pas nul.

4.4 OBSERVABILITÉ DE L'ÉTAT D'UN SYSTÈME

L'observabilité des systèmes à temps discret s'étudie exactement de la même manière que pour ceux à temps continu.

4.4.1 Définition

Un système est dit observable à un instant $k_2 T_e$, si la connaissance du signal d'entrée et du

signal de sortie sur un intervalle de temps $[k_1 T_e, k_2 T_e]$ permet de calculer l'état du système à l'instant $k_2 T_e$.

Si un système est observable quel que soit l'instant $k_2 T_e$, il est dit complètement observable.

4.4.2 Critère d'observabilité

Un système est complètement observable si et seulement si les vecteurs colonnes $(C)^T, [A^T](C)^T, [A^T]^2(C)^T, \dots, [A^T]^{n-1}(C)^T$ sont linéairement indépendants.

Cet énoncé peut se traduire également de la manière suivante : on définit la matrice d'observabilité par la matrice formée des n vecteurs colonnes $(C)^T, [A^T](C)^T, [A^T]^2(C)^T, \dots, [A^T]^{n-1}(C)^T$:

$$[O]_{([A](C))} = [(C)^T \quad [A^T](C)^T \quad [A^T]^2(C)^T \dots [A^T]^{n-1}(C)^T]$$

La paire $[A], (C)$ est complètement observable si et seulement si la matrice d'observabilité est régulière, autrement dit si son déterminant n'est pas nul.

4.4.3 Exemple

Considérons un système régi par les équations :

$$\begin{cases} x(k+1) = [A]x(k) + (B)e(k) \\ s(k) = (C)x(k) \end{cases}$$

avec : $[A] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ et $(C) = (1 \quad -1)$

La matrice d'observabilité est définie par :

$$[O]_{([A](C))} = [(C)^T \quad [A^T](C)^T] \text{ avec : } (C)^T = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et : } [A^T] = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Or : $[A^T](C)^T = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

d'où : $[O]_{([A](C))} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det [O]_{([A](C))} = -1$

Le système est donc complètement observable.

4.5 RELATION ENTRE LA REPRÉSENTATION D'ÉTAT ET LA FONCTION DE TRANSFERT D'UN SYSTÈME

4.5.1 Représentation d'état à partir de la fonction de transfert

En temps discret comme en temps continu, la représentation d'état d'un système n'est pas unique. Nous présentons ici plusieurs types de représentation d'état que l'on peut obtenir à partir d'une fonction de transfert $G(z)$. Les principes de construction étant rigoureusement les mêmes que pour la représentation d'état en temps continu, nous nous limiterons à présenter les résultats essentiels.

a) Représentation modale

Ce type de représentation, encore appelée représentation parallèle, convient particulièrement bien à la représentation d'un système possédant plusieurs pôles réels distincts. Soit $G(z)$ sa fonction de transfert :

$$G(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{\alpha_1}{z - p_1} + \frac{\alpha_2}{z - p_2} + \dots + \frac{\alpha_n}{z - p_n}$$

Cette écriture fait apparaître la somme de n fonctions de transfert et peut être matérialisée, sous forme de représentation d'état, par le schéma de la figure 4.4 en faisant apparaître n blocs élémentaires placés en parallèle.

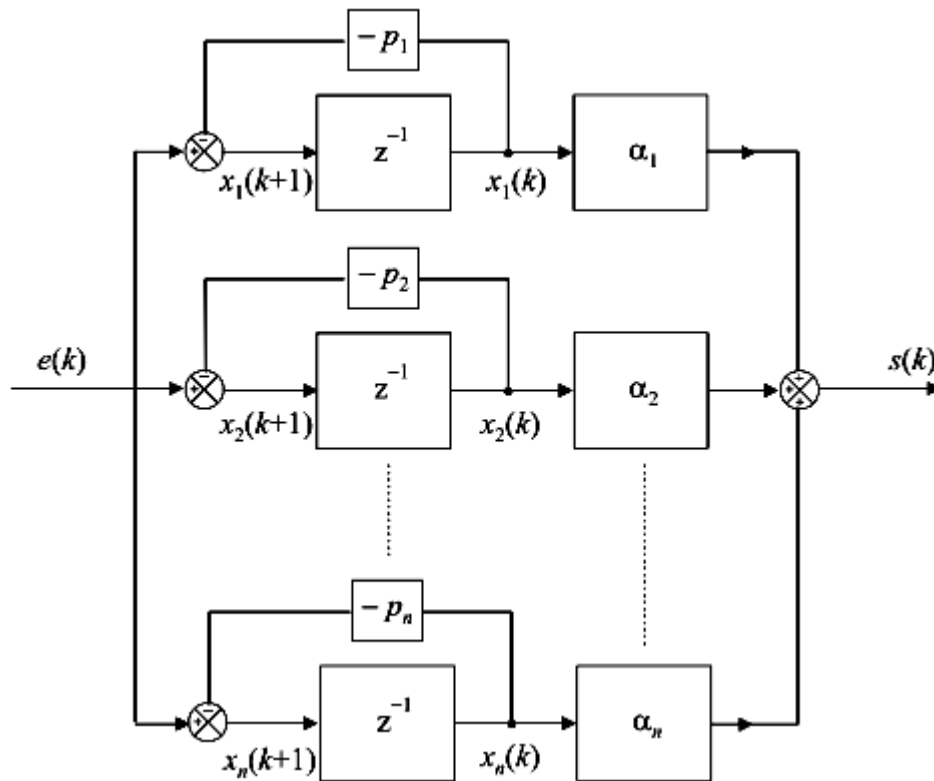


Figure.4.4 : Représentation modale d'un système à temps discret.

On lit immédiatement :

$$x_i(k+1) = p_i x_i(k) + e(k)$$

d'où :

$$\begin{cases} x(k+1) = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & p_n \end{bmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} e(k) \\ s(k) = (\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_n) x(k) \end{cases}$$

La matrice de commande $[A]$ est diagonale et ses valeurs propres sont les pôles de la fonction de transfert.

b) Représentation série

Soit :

$$G(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{\alpha_1}{(z - p_1)(z - p_2) \times \dots \times (z - p_n)}$$

Cette écriture fait apparaître le produit de n fonctions de transfert et peut être matérialisée par la mise en cascade de n blocs élémentaires.

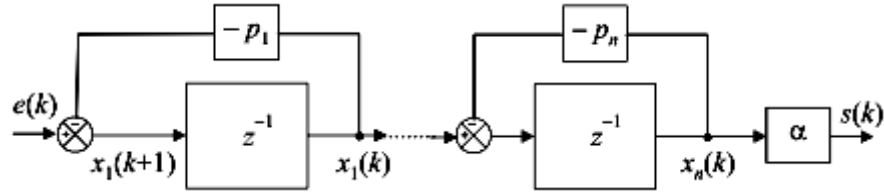


Figure.4.5 : Représentation d'état d'un système discret sous forme série.

La figure 4.5 propose une représentation d'état cohérente avec cette forme en cascade de la fonction de transfert.

Dans ce cas, on a :

$$\begin{cases} x(k+1) = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & p_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & p_n \end{bmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} e(k) \\ s(k) = (0 \quad 0 \quad \dots \quad \alpha) x(k) \end{cases}$$

c) Représentation compagne commandable

On suppose ici que la fonction de transfert n'est pas factorisée.

Soit :

$$G(z) = \frac{b_m z^{m-n} + b_{m-1} z^{m-n-1} + \dots + b_1 z^{-n+1} + b_0 z^{-n}}{1 + a_{n-1} z^{-1} + \dots + a_1 z^{-n+1} + a_0 z^{-n}}$$

La figure 4.6 représente la forme compagne commandable en temps discret.

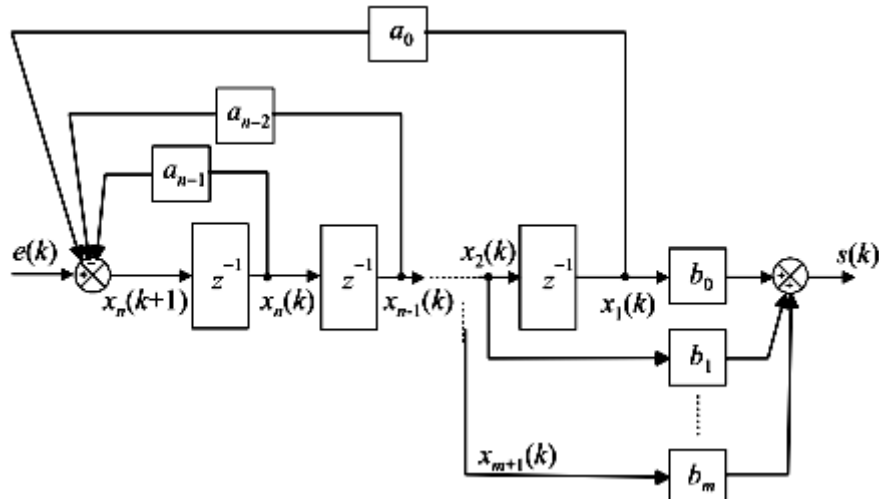


Figure.4.6 : Représentation d'état sous forme compagne commandable.

Les équations d'état se déduisent naturellement de cette représentation :

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k) \\ x_2(k+1) = x_3(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) = x_n(k) \\ x_n(k+1) = -a_0x_1(k) - a_1x_2(k) - \dots - a_{n-1}x_n(k) + e(k) \\ s(k) = b_0x_1(k) + b_1x_2(k) + \dots + a_mx_{m+1}(k) \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e(k) \\ s(k) = (b_0 \quad \dots \quad b_m \quad 0 \quad \dots \quad 0) x(k) \end{cases}$$

d) Représentation compagne observable

La représentation compagne observable peut être mise en évidence à partir de la forme de $G(z)$ déjà transformée dans le paragraphe précédent :

$$G(z) = \frac{b_m z^{m-n} + b_{m-1} z^{m-n-1} + \dots + b_1 z^{-n+1} + b_0 z^{-n}}{1 + a_{n-1} z^{-1} + \dots + a_1 z^{-n+1} + a_0 z^{-n}}$$

La figure 4.7 représente la forme compagne observable en temps discret.

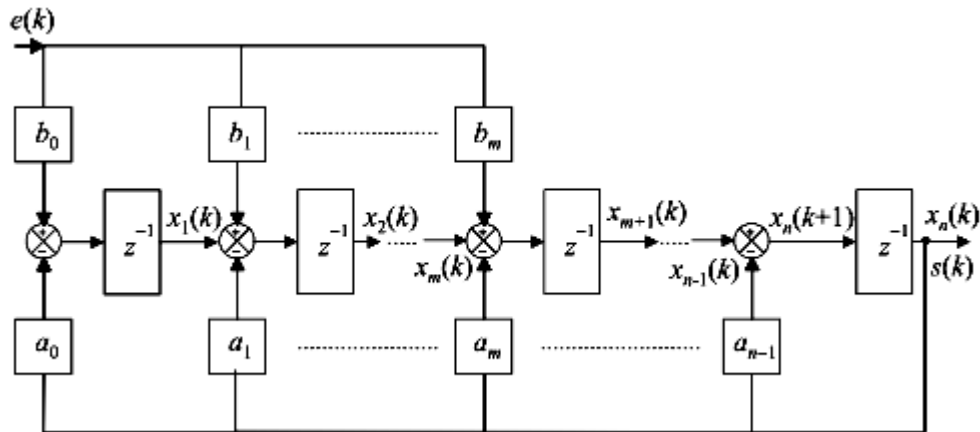


Figure.4.7 : Représentation d'état du système sous forme compagne observable.

Les équations d'état se déduisent naturellement de cette représentation :

$$\begin{cases} x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & -a_n \end{bmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} e(k) \\ s(k) = (0 \quad \dots \quad 0 \quad 1) x(k) \end{cases}$$

4.5.2 Calcul de la fonction de transfert à partir de la représentation d'état

a) Transformée en z des équations d'état

Si on applique la transformation en z aux équations d'état et si on suppose nulles les conditions initiales, on obtient :

$$\begin{cases} x(k+1) = [A]x(k) + (B)e(k) \\ s(k) = (C)x(k) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} zX(z) = [A]X(z) + (B)E(z) \\ S(z) = (C)X(z) \end{cases}$$

On a donc :
$$X(z) = (zI - [A])^{-1} (B) E(z)$$

On tire alors l'expression de S(z) :

$$S(z) = (C)(zI - [A])^{-1} (B) E(z)$$

La fonction de transfert du système est donc :

$$G(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = (C)(zI - [A])^{-1} (B)$$

L'inverse d'une matrice carrée étant égale à sa matrice adjointe divisée par son déterminant, nous pouvons en déduire que les pôles de la fonction de transfert sont les valeurs de z qui sont solutions de l'équation :

$$\det(zI - [A]) = 0$$

Ce sont donc les valeurs propres de la matrice [A].

Attention : La fonction de transfert obtenue correspond uniquement à la partie observable et commandable du système.

4.6 COMMANDE ÉCHANTILLONNÉE D'UN SYSTÈME À TEMPS CONTINU

Tout comme nous l'avons vu dans la quatrième partie de cet ouvrage, la commande à temps discret d'un système à temps continu est une opération très fréquente. La représentation d'état ne change rien à cela.

Nous avons alors affaire à des systèmes dont le schéma général correspond à la figure 4.8.

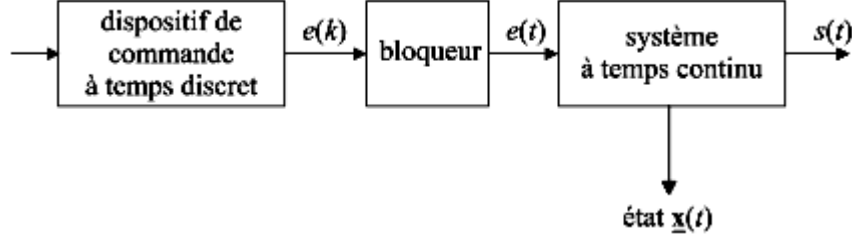


Figure.4.8 : Système à temps continu commandé à temps discret.

Le bloqueur (par exemple d'ordre 0), assure au système à temps continu un signal de commande $e(t)$ constant entre deux instants d'échantillonnage et égal à $e(kT_e)$ entre les instants kT_e et $(k+1)T_e$.

4.6.1 Comportement du système

Le comportement du système à temps continu est régi par ses équations d'état et son état, à un instant t quelconque, est déterminé par la relation :

$$x(t) = e^{[A](t-t_1)} x(t_1) + \int_{t_1}^t e^{[A](t-\tau)} (B) e(\tau) d\tau$$

Il est possible, à partir de cette équation, de calculer l'état du système à un instant d'échantillonnage $(k+1)T_e$ en fonction de son état précédent $x(kT_e)$ et du signal d'entrée (constant sur cet intervalle) $e(kT_e)$:

$$x[(k+1)T_e] = e^{[A]T_e} x(kT_e) + \int_{kT_e}^{(k+1)T_e} e^{[A]\{(k+1)T_e-\tau\}} (B) e(\tau) d\tau$$

Sur l'intervalle de temps considéré, on a :

$$e(\tau) = C^{te} = e(kT_e)$$

Par conséquent :

$$x[(k+1)T_e] = e^{[A]T_e} x(kT_e) + \left[\int_{kT_e}^{(k+1)T_e} e^{[A]\{(k+1)T_e-\tau\}} d\tau \right] (B) e(kT_e)$$

En posant : $f(T_e) = e^{[A]T_e}$ et $g(kT_e) = \int_{kT_e}^{(k+1)T_e} e^{[A]\{(k+1)T_e-\tau\}} d\tau$

On a : $x[(k+1)T_e] = f(T_e) x(kT_e) + g(kT_e) (B) e(kT_e)$

Il est également possible de connaître l'état du système entre deux instants d'échantillonnage, par exemple entre kT_e et $(k+1)T_e$ à partir de cette équation qui est valable quel que soit l'instant t .

Pour $kT_e < t < (k+1)T_e$, on a :

$$x(t) = e^{[A](t-kT_e)} x(kT_e) + \left[\int_0^{t-kT_e} e^{[A]\tau} d\tau \right] (B) e(kT_e)$$

4.6.2 Influence de la période d'échantillonnage sur l'observabilité et la commandabilité d'un système discret

Le choix de la période d'échantillonnage est susceptible d'influencer l'observabilité et la commandabilité d'un système. On montre qu'un système à temps discret perd son observabilité et sa commandabilité si il existe deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2 de la matrice $[A]$ qui possèdent la même partie réelle et dont la différence des parties imaginaires est un multiple de la pulsation d'échantillonnage $\omega_e = \frac{2\pi}{T_e}$.

Remarque : il y a donc peu de chance qu'un système à temps continu perde sa commandabilité et son observabilité si on prend soin de ne pas échantillonner à une fréquence multiple d'une de ses fréquences propres.

ANNEXE A

Table des transformées en z usuelles

Fonctions temporelles	Transformées en z
$\delta(t)$	$\Delta(z) = 1$
$u(t) = 1$	$U(z) = \frac{z}{z-1}$
$v(t) = kt$	$V(z) = \frac{zT_e}{(z-1)^2}$
$s(t) = t^2$	$S(z) = \frac{z(z+1)T_e^2}{(z-1)^3}$
$s(t) = e^{-at}$	$S(z) = \frac{z}{z - e^{-aT_e}}$
$s(t) = te^{-at}$	$S(z) = \frac{zT_e e^{-aT_e}}{(z - e^{-aT_e})}$
$s(t) = 1 - e^{-at}$	$S(z) = \frac{z(z - e^{-aT_e})}{(z-1)(z - e^{-aT_e})}$
$s(t) = e^{-at} - e^{-bt}$	$S(z) = \frac{z}{z - e^{-aT_e}} - \frac{z}{z - e^{-bT_e}}$
$s(t) = t - \frac{1}{a} + \frac{e^{-at}}{a}$	$S(z) = \frac{zT_e}{(z-1)^2} - \frac{z(1 - e^{-aT_e})}{a(z-1)(z - e^{-aT_e})}$
$s(t) = 1 + \frac{b}{a-b}e^{-at} - \frac{a}{a-b}e^{-bt}$	$S(z) = \frac{z}{z-1} + \frac{bz}{(a-b)(z - e^{-aT_e})} - \frac{az}{(a-b)(z - e^{-bT_e})}$
$s(t) = 1 - e^{-at} - ate^{-at}$	$S(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - e^{-aT_e}} - \frac{zaT_e e^{-aT_e}}{(z - e^{-aT_e})^2}$
$s(t) = \sin \omega t$	$S(z) = \frac{z \sin \omega T_e}{z^2 - 2z \cos \omega T_e + 1}$
$s(t) = \cos \omega t$	$S(z) = \frac{z(z - \cos \omega T_e)}{z^2 - 2z \cos \omega T_e + 1}$
$s(t) = e^{-at} \sin \omega t$	$S(z) = \frac{ze^{-aT_e} \sin \omega T_e}{z^2 - 2ze^{-aT_e} \cos \omega T_e + e^{-2aT_e}}$
$s(t) = e^{-at} \cos \omega t$	$S(z) = \frac{z^2 - ze^{-aT_e} \cos \omega T_e}{z^2 - 2ze^{-aT_e} \cos \omega T_e + e^{-2aT_e}}$

ANNEXE B

Équivalence entre fonctions de transfert en temps continu et en temps discret

Il n'existe pas, à proprement parler, d'équivalents exacts entre une fonction de transfert en temps continu, de type Laplace et une fonction de transfert en temps discret en z . Les équivalents proposés sont plus ou moins précis, plus ou moins efficaces et plus ou moins délicats à manipuler. Le choix d'un type d'équivalent est susceptible d'influencer la validité des résultats en termes de réponse temporelle ou de représentation fréquentielle.

Équivalence à la dérivation :

$$p \longleftrightarrow \frac{1-z^{-1}}{T_e}$$

Équivalence à l'intégration :

$$p \longleftrightarrow \frac{2(1-z^{-1})}{T_e(1+z^{-1})}$$

Équivalence modale :

$$p - p_i \longleftrightarrow z - e^{p_i T_e}$$

La table ci-dessous propose quelques équivalents basés sur l'équivalence à la réponse impulsionnelle et justifiés, pour les plus simples, par l'équivalence modale. Ils sont spécifiquement adaptés pour conserver le gain statique du système. Ces équivalents peuvent être obtenus par la relation :

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \times Z \left[\frac{G(p)}{p} \right] = \frac{z-1}{z} \times Z \left[\int g(t) dt \right]$$

Où $G(p)$ est la transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle du système à temps continu.

Fonction de transfert en temps continu	Fonction de transfert en temps discret
$G(p) = \frac{1}{p}$	$G(z) = \frac{T_e}{z-1}$
$G(p) = \frac{1}{p+a}$	$G(z) = \frac{1-e^{-aT_e}}{a(z-e^{-aT_e})}$
$G(p) = \frac{1}{(p+a)(p+b)}$	$G(z) = \frac{(1-e^{-aT_e})(1-e^{-bT_e})}{ab(z-e^{-aT_e})(z-e^{-bT_e})}$
$G(p) = \frac{1}{p(p+a)}$	$G(z) = \frac{T_e}{a(z-1)} - \frac{(1-e^{-aT_e})}{a^2(z-e^{-aT_e})}$

Bibliographie

- [1] J-M. Retif. Automatique Synthèse d'une Commande Robuste Correcteurs Échantillonnés. Commandes par PID Niveau B, TECHNOSUP. Ellipses, 2011.
- [2] Y. Granjon. AUTOMATIQUE. Systèmes linéaires, non linéaires, à temps continu, à temps discret, représentation d'état. Cours et exercices corrigés. 2^e édition. DUNOD, 2010.
- [3] S. Tliba, M. Jungers, Y. Chitour. Commande des processus. Asservissements numériques. Notes de cours. Université Paris-Sud XI - ENS de Cachan. 2006.
- [4] D. Peaucelle. SYSTEMES A TEMPS DISCRET. Commande numérique des procédés. INSA de Toulouse, France, 2003.
- [5] H. Egon, M. Marie, P. Poree. TRAITEMENT DU SIGNAL ET AUTOMATIQUE II: Asservissements linéaires échantillonnés et représentation d'état. Ecoles d'ingénieurs, BTS-IUT. Editions Hermann. Collection Méthodes. 2001.
- [6] C. Sueur, P. Vanheeeghe, and P. Borne. Automatique des systèmes échantillonnés: éléments de cours et exercices résolus. Editions TECHNIP, 2000.
- [7] Y. Sévely. Systèmes et asservissements linéaires échantillonnés. DUNOD, 1999.
- [8] P. Borne, G. Dauphin-Tanguy, J.P. Richard, F. Rotella, and I. Zambettakis. AUTOMATIQUE. Analyse et régulation des processus industriels, Tome 2 régulation numérique. Méthodes et pratiques de l'ingénieur. Editions TECHNIP, 1993.